X. — Éléments entiers sur un anneau

Exercice 1 Soient $A \subseteq B$ deux anneaux commutatifs. Les assertions suivantes sont équivalentes pour un élément $b \in B$.

(i) Il existe $N \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_N \in A$ tels que $b^N + a_1 b^{N-1} + ... + a_N = 0$.

(ii) L'anneau $A[b]$ † est de type fini comme $A-$module *i.e.* $\exists m \in \mathbb{N}$, $e_1, ..., e_m \in B$, $A[b] = Ae_1 + ... + Ae_m$.

(iii) Il existe $A[b] \subseteq C \subseteq B$ un sous-anneau qui est de type fini comme $A-$module.

a) Montrer $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

b) Si C vérifie (iii), soit $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_m(A)$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant m,\ be_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i\ .$$

Montrer que

$$\forall\, P(X) \in A[X],\ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant m,\ P(b)e_j = \sum_{i=1}^{m} P(M)_{ij} e_i\ .$$

c) En déduire $(iii) \Rightarrow (i)$, à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton.
On dit que b est entier sur A si $(i), (ii), (iii)$ sont vérifiées.

d) Montrer que $\sqrt{2}$ est entier sur $\mathbb{Z}$ mais non $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

e) Montrer que si $b_1, b_2 \in B$ sont entiers sur l'anneau A, alors $b_1 \pm b_2$, $b_1 b_2$ aussi.

f) Soit $x \in \mathbb{C}$. Vérifier que x est entier sur $\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ x est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et son polynôme minimal unitaire sur $\mathbb{Q}$ est à coefficients entiers.

g) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est l'anneau des éléments du corps $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$ entiers sur $\mathbb{Z}$.

Indication. Si $a + ib\sqrt{5}$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$, est entier sur $\mathbb{Z}$, utiliser la question précédente et un peu d'arithmétique des entiers pour montrer que $a, b \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 factoriel $\overset{\Longleftarrow}{\underset{\times}{\Longrightarrow}}$ intégralement clos

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K. On dit que A est *intégralement clos* si tout élément $x \in K$ entier sur A vérifie $x \in A$.

a) Montrer que $\mathbb{Z}$ est intégralement clos et plus généralement que *factoriel* $\Rightarrow$ *intégrament clos.*

†. $A[b] := \{a_0 + ... + a_K b^K\ :\ K \in \mathbb{N},\ a_0, ..., a_K \in A\}$.

b) Montrer en considérant $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ que la réciproque est fausse.

c) Supposons $P(X) \in A[X]$ unitaire et A intégralement clos. Montrer que si $A = BC \in K[X]$ pour certains $B, C \in K[X]$, alors $B, C \in A[X]$.

Exercice 3 Indépendance linéaire des racines carrées d'entiers

a) Montrer par récurrence sur $N \geqslant 0$ que si $a_1, ...a_N$ sont des entiers > 0 sans facteur carré, deux à deux premiers entre eux, alors

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, ..., \sqrt{a_N}) : \mathbb{Q}] = 2^N \ .$$

b) Montrer que les $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sans facteur carré, sont $\mathbb{Q}-$linéairement indépendants.

c) Montrer que si $N \geqslant 0$ et si $a_1, ...a_N$ sont des entiers > 0 sans facteur carré, deux à deux premiers entre eux, alors

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, ..., \sqrt{a_N}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a_1} + ... + \sqrt{a_N}) \ .$$

Indication. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, ..., \sqrt{a_N})$. $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant N, \exists\, \varphi_i : K \to K$ *automorphisme de corps tel que* $\forall\, 1 \leqslant j \leqslant N$, $\varphi_i(\sqrt{a_j}) = \sqrt{a_j}$ *si* $j \neq i$, $-\sqrt{a_i}$ *si* $j = i$.

Exercice 4 Applications en théorie des représentations Soit G un groupe fini d'ordre N. Pour tout $g \in G$, on note $e_g \in \mathbb{Z}^G$ tel que $\forall\, h \in G$, $e_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = g, \\ 0 & \text{si } h \neq g. \end{cases}$ On notera $\mathbb{Z}G$ l'anneau donné par le groupe additif $\mathbb{Z}^G$ avec le produit défini par :

$$\forall\, g, h \in G,\ e_g e_h = e_{gh} \ .$$

†

a) Quel est le neutre pour le produit dans l'anneau $\mathbb{Z}G$?

b) Soit C une classe de conjugaison de G. Montrer que l'élément $\sum_{g \in C} e_g$ de l'anneau $\mathbb{Z}G$ commute avec tous les éléments de $\mathbb{Z}G$ et que c'est un élément entier sur $\mathbb{Z}$.

c) Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ une représentation irréductible de degré d. À l'aide du lemme de Schur et de la question précédente, montrer que la matrice $\sum_{g \in C} \rho(g)$ est une homothétie de rapport un entier algébrique λ_C.

d) Montrer que $d\lambda_C = \sum_{g \in C} \chi_\rho(g) = |C|\chi_\rho(C)$.

†. Si G n'est pas abélien, ce n'est pas un anneau commutatif.

e) En utilisant la relation d'orthogonalité $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle_G = 1$, montrer que $\frac{|G|}{d}$ est un entier algébrique et en déduire

$$d \mid |G| \ .$$

f) Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{N}}$. Soit χ un caractère irréductible de G. Montrer que pour tout $g \in G$, il existe un polynôme $P_g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \chi(g^k) = P_g(\zeta^k) \ .$$

Indication. Si ρ est la représentation associée à χ, diagonaliser la matrice $\rho(g)$.

g) Montrer que pour tout entier k premier à N, l'application $G \to G$, $g \mapsto g^k$ est une bijection.

h) En déduire que le polynôme $Q(X) = \prod_{g \neq 1} P_g(X)$ vérifie :

$$\forall\, k \wedge N = 1,\ Q(\zeta^k) = Q(\zeta) \ .$$

i) En déduire que $Q(\zeta) \in \mathbb{Z}$. *Indication. Soit $C \in \mathscr{M}_{\varphi(N)}(\mathbb{Z})$ la matrice compagnon du polynôme cyclotomique $\Phi_N(X)$. Vérifier que C est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres. Vérifier que la matrice $Q(C)$ n'a qu'une seule valeur propre, que c'est une homothétie de rapport entier ...*

j) Si χ est de degré > 1, montrer, à l'aide de l'inégalité arithmético-géométrique [†], que $|\prod_{g \neq 1} \chi(g)| < 1$.

k) En déduire que $\chi(g) = 0$ pour au moins un $g \in G$.

l) Si $G = \mathfrak{S}_n$, montrer que

$$\forall\, \chi \text{ caractère},\ \forall\, g \in G,\ \forall\, k \wedge n! = 1,\ \chi(g^k) = \chi(g) \ .$$

m) En déduire que la table des caractères du groupe $\mathfrak{S}_n$ est à coefficients entiers.

†. $\forall\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, a_1, ..., a_N \in \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ (a_1 ... . a_N)^{\frac{1}{N}} \leqslant \frac{a_1 + ... + a_N}{N}$