# II — Premiers exemples de représentations linéaires de groupes finis

**Exercice 1 2−sous-groupes maximaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$**

a) Soit $G \leqslant \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe tel que :

$$\forall\, g \in G,\ g^2 = I_n \ .$$

Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$\forall\, g \in G,\ PgP^{-1} \in \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} \ .$$

b) En déduire que si les groupes $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont isomorphes, alors $m = n$.

**Exercice 2 Caractères d'un groupe abélien fini**

a) Montrer que les représentations irréductibles d'un groupe fini abélien sont de dimension 1.

b) Soit $G$ un groupe. On pose $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$. Déterminer $\hat{G}$ si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

c) En déduire que si $G$ est abélien, alors $\hat{G} \simeq G$.

**Exercice 3 Représentations de $\mathfrak{S}_3$**

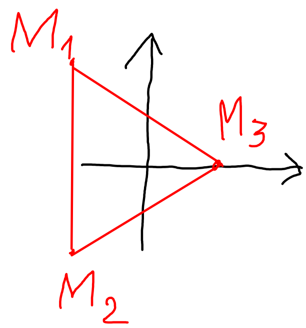
a) Déterminer les deux représentations[†] irréductibles $\rho_1, \rho_2$ de degré 1 du groupe $G = \mathfrak{S}_3$.

b) Soit $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \ :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. On considère l'action de $G$ sur $V$ par permutation des coordonnées. Soit $\rho_3$ la représentation obtenue. Donner les matrices $\rho_3(g)$, $g \in G$ dans une base bien choisie.

c) La représentation $\rho_3$ est-elle irréductible ? Même quetion lorsqu'on remplace $\mathbb{C}$ par le corps $\mathbb{F}_3$.

d) Compléter le tableau suivant.

| $G$ | 1 | (12) | (123) |
|---|---|---|---|
| $\chi_1(g)$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2(g)$ | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_3(g)$ | 2 | 0 | -1 |




où $\chi_i(g) = \mathrm{Tr}\rho_i(g)$.

e) Soient $M_k = (\cos \frac{2k\pi}{3}, \sin \frac{2k\pi}{3})$, $k = 1, 2, 3$.

Soit $G_T = \left\{ g \in O_2(\mathbb{R}) \ :\ g(\{M_1, M_2, M_3\}) = \{M_1, M_2, M_3\} \right\}$.

Montrer que $G_T \simeq G$. En déduire une nouvelle représentation $\rho_3'$ de $G$ de degré 2.

Vérifier que $\rho_3'$ et $\rho_3$ sont équivalentes.

†. à isomorphisme près

**Exercice 4 Représentations du groupe $D_4$**

a) Soit $G = D_4 := O_2(\mathbb{Z})$. Déterminer deux générateurs $r, s$ de $G$ d'ordres 4 et 2. Quelles sont les 5 classes de conjugaison de $G$ : $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ ?

b) Déterminer les représentations de $G$ de degré 1 (à isomorphisme près) : $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$.

c) Donner une représentation irréductible de $G$ de degré 2 : $\rho_5$.

d) Compléter le tableau suivant.

| $G$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_1(g)$ | | | | | |
| $\chi_2(g)$ | | | | | |
| $\chi_3(g)$ | | | | | |
| $\chi_4(g)$ | | | | | |
| $\chi_5(g)$ | | | | | |

où $\chi_i(g) = \mathrm{Tr}\rho_i(g)$.

**Exercice 5 Cas du groupe $Q_8$**

Même exercice que précédemment avec le groupe $H = Q_8 = \mathrm{SU}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ †.

*On trouve le même tableau de caractères bien que les deux groupes ne soient pas isomorphes.*

†. $\mathrm{SU}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$