III — Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$

Exercice 1 Soit $G = \mathfrak{S}_4$.

a) Quelles sont les représentations de G de degré 1 ?

b) On note

$$P_1 = \{1,2\} \cup \{3,4\},\ P_2 = \{1,3\} \cup \{2,4\},\ P_3 = \{1,4\} \cup \{2,3\}$$

les trois partitions de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ en deux parties de cardinal 2.
En déduire un morphisme de groupes

$$G \longrightarrow \mathfrak{S}_3$$

$$(12) \longmapsto (23)$$

$$(23) \longmapsto (12)$$

$$(34) \longmapsto (23)$$

puis une représentation irréductible de G de degré 2.
En considérant le sous-groupe $K = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ de G montrer qu'il n'existe pas de morphisme injectif $G \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$.

c) Donner dans une base choisie les matrices de la représentation par permutations des coordonnées de l'hyperplan $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0)$ de $\mathbb{C}^4$.

d) On note

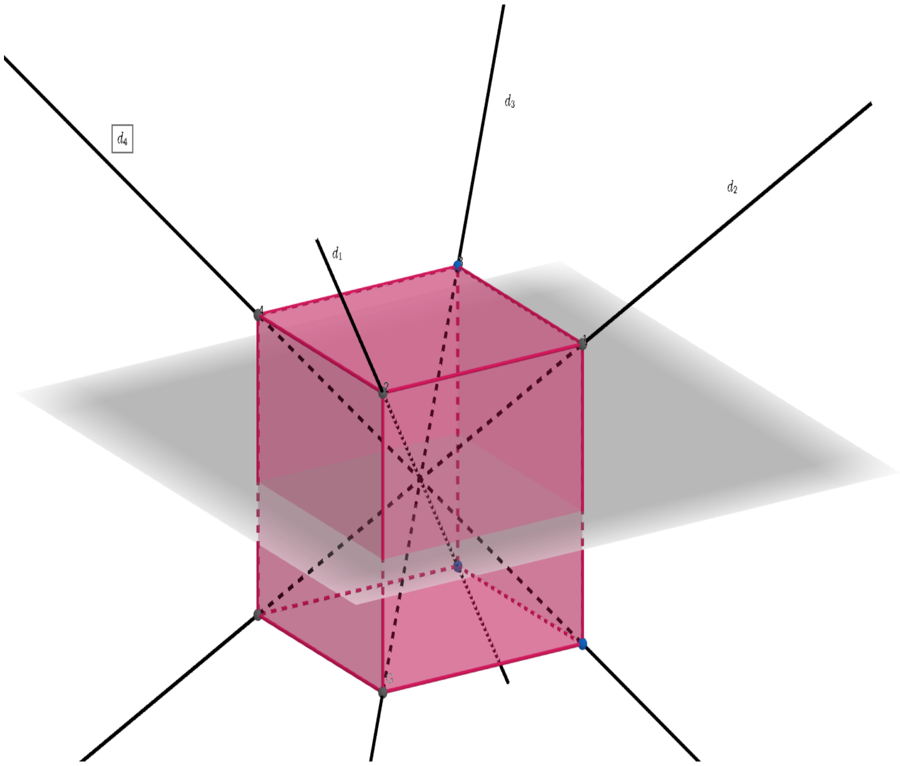
$$d_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$d_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$d_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$d_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

les diagonales du cube de sommets de coordonnées ± 1.



En utilisant une action de $G_C = SO_3(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$, montrer que $G_C \simeq G$. En déduire les matrices de la représentation ρ de degré 3 associée de G.

e) La représentation ρ est-elle équivalente à la représentation précédente ?

f) Donner la table des caractères de G.

Exercice 2 Soit $G = \mathfrak{A}_4$.

a) Quelles sont les représentations de G de degré 1.

b) Soit $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Montrer que la représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ définie par la permutation des coordonnées est irréductible.

Indication. Si $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ *avec* $x_1 \neq 0$*, calculer* $v + \rho((234))(v) + \rho((243))(v)$ *et en déduire que si un sous-espace* $0 \neq W \leqslant V$ *est* $\rho(G)$ *stable, alors* $(1, -1, 0, 0) \in W$.

c) Donner la table des caractères de G.