IV — Table des caractères du groupe alterné $\mathfrak{A}_5$

Soit $G = \mathfrak{A}_5$.

a) Déterminer les classes de conjugaison de G et leurs cardinaux. Les $3-$cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_5$. En effet, si c est un $3-$cycle, alors $c = s(123)s^{-1}$ pour un certain $s \in \mathfrak{S}_5$. Si $s \notin \mathfrak{A}_5$, alors $s(45) \in \mathfrak{A}_5$ car $\epsilon(s(45)) = -\epsilon(s)$. Or comme (45) commute à (123), $s(45)(123)(s(45))^{-1} = s(45)(123)(45)s^{-1} = s(123)s^{-1} = c$.

De même les doubles-transpositiopns sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_5$ et dans $\mathfrak{A}_5$.

En revanche les $5-$cycles ne sont pas conjugués. En effet, dans $\mathfrak{S}_5$, il y a $\frac{5.4.3.2.1}{5} = 24$ $5-$cycles[†] Or, la classe de conjugaison de (12345) dans $\mathfrak{S}_5$ est en bijection avec $\mathfrak{S}_5/C$ où $C = \{g \in \mathfrak{S}_5 \ : \ g(12345)g^{-1} = (12345)\}$. Donc $|C| = 120/24 = 5$. Comme $(12345) \in C$, on a $C = \langle (12345) \rangle$. La classe de cnjugaison de (12345) est de cardinal $|\mathfrak{A}_5/(\mathfrak{A}_5 \cap C)| = |\mathfrak{A}_5/C| = 60/5 = 12$. Donc dans $\mathfrak{A}_5$, les classes de conjugaison des $5-$cycles sont de cardinal 12. On donc 2 classes de conjugaison de douze $5-$cycles chacune.

Or si $\tau = (12)$, $\tau(12345)\tau^{-1} = \sigma(12345)\sigma^{-1} \Leftrightarrow \tau^{-1}\sigma \in C \Rightarrow \tau^{-1} \in C\sigma^{-1} \Rightarrow \tau \in \sigma C = \sigma\langle(12345)\rangle \Rightarrow \epsilon(\sigma) = \epsilon(\tau) = -1$.

Donc $\tau(12345)\tau^{-1} = (13452)$ n'est pas conjugué à (12345) dans $\mathfrak{A}_5$.

Voici les classes de conjugaison : celle de 1 (un élément), celle des $3-$cycles $(5.4.3/3 = 20$ éléments, celle des doubles-transpositions : $\binom{5}{2}\binom{3}{2}/2 = 15$[‡]

b) Soient χ_1 le caractère trivial et χ_2 celui de la représentation de dimension 4 donnée par la permutation des coordonnées de l'hyperplan

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{C}^5 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\} \ .$$

Montrer que χ_2 est irréductible. Il suffit de calculer

$$\langle \chi_2, \chi_2 \rangle = \sum_{g \in \mathfrak{A}_5} |\chi_2(g)|^2 \ .$$

Or la représentation standard

$$\rho : \mathfrak{S}_5 \to \mathrm{GL}_5(\mathbb{C}),\ \sigma \mapsto P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant 5}$$

vérifie $\chi_\rho = 1 + \widetilde{\chi_2}$ avec $\chi_2 = \widetilde{\chi_2}|_{\mathfrak{A}_5}$.

Or $\chi_\rho(\sigma) = \mathrm{Tr}(P_\sigma) = \sum_{i=1,2,3,4,5} \delta_{i\sigma(i)} = |\{i \ : \ \sigma(i) = i\}|$ le nombre de points fixes de la permutation σ.

$$\text{Donc } \chi_2(\sigma) = \begin{cases} 4 & \text{si } \sigma = 1 \\ 1 & \text{si } \sigma \ 3-\text{cycle} \\ -1 & \text{si } \sigma \ 5-\text{cycle} \\ 0 & \text{si } \sigma \text{ double-transposition.} \end{cases}$$

Donc

$$\langle \chi_2, \chi_2 \rangle_{\mathfrak{A}_5} = \frac{1}{60}(4^2 + 20.1^2 + 24.(-1)^2 + 15.0^2) = 1 \ .$$

Donc χ_2 est un caractère irréductible du groupe $\mathfrak{A}_5$.

†. 5 choix pour le premier chiffre, puis 4 pour le deuxième, *etc*, puis on divie par 5 car chaque $5-$cycle peut être représenté par cinq $5-$uplets distincts : par exemple $(12345) = (23451) = (34512) = (45123) = (51234)$.

‡. On divise par 2 car une double-transposition s'écrit de deux façons sous la forme $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ où les τ_i sont des transpositions et deux classes de douze $5-$cycles.

c) Soit $S = \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]_2$ l'espace des polynômes homogènes de degré 2. Déterminer $\dim S$. Soit χ_S le caractère de la représentation obtenue par permutation des variables. Déterminer χ_S. On rappelle la formule $\dim \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]_d = \binom{n+d-1}{d}$ donc $\dim S = \binom{6}{2} = 15$. Voici une base :

$$X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_4^2, X_5^2,$$

$$X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5,$$

$$X_1X_3, X_2X_4, X_3X_5,$$

$$X_1X_4, X_2X_5,$$

$$X_1X_5$$

Comme chaque élément de $\mathfrak{A}_5$ agit par permutation des éléments de la base, $\forall \sigma \in \mathfrak{A}_5$, $\chi_S(\sigma) =$ le nombre de points fixes parmi les X_iX_j, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 5$. On obtient :

	1	(123)	(12345)	(13452)	(12)(34)
χ_S	15	3	0	0	3

†

d) Montrer que $\chi_3 := \chi_S - 2\chi_1 - 2\chi_2$ est un caractère irréductible de degré 5. Chaque représentation est une somme directe de représentations irréductibles, donc $\chi_S = \sum_\chi n_\chi \chi$ où χ décrit les caractères irréductibles de G et les n_χ sont des entiers. Comme les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales, $n_\chi = \langle \chi_S, \chi \rangle_G$. En particulier,

$$\langle \chi_S, \chi_1 \rangle_G = \frac{1}{60}(15 + 20.3 + 15.3) = 2$$

$$\langle \chi_S, \chi_1 \rangle_G = \frac{1}{60}(15.4 + 20.3.1) = 2$$

et donc $\chi_3 = \chi_S - 2\chi_1 - 2\chi_2$ est un caractère de G.

On a :

	1	(123)	(12345)	(13452)	(12)(34)
χ_3	5	-1	0	0	1

et

$$\langle \chi_S, \chi_S \rangle_G = \frac{1}{60}(5^2 + 20.(-1)^2 + 15.1^2) = 1$$

donc χ_3 est irréductible.

†. Par exemple (12)(34) laisse fixe les monômes X_1X_2, X_3X_4, X_5^2 et c'est tout ...

e) En déduire qu'il existe deux caractères irréductibles distincts de degré 3 χ_4, χ_5 et compléter la table des caractères :

	1	(123)	(12345)	(13452)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	1	-1	-1	0
χ_3	5	-1	0	0	1
χ_4	3	a	b	c	d
χ_5	3	a'	b'	c'	d'

Soient n_i les degrés des représentations irréductibles χ_i. On a $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2+n_5^2 = |G| = 60 \Rightarrow n_4^2+n_5^2 = 18$. Supposons $n_4 \leqslant n_5$. On voit que $n_4 \leqslant 3$. Il n'y a qu'une solution entière : $n_4 = n_5 = 3$.

Les lignes sont orthogonales donc

$$\langle \chi_4, \chi_1 \rangle_G = \langle \chi_4, \chi_2 \rangle_G = \langle \chi_4, \chi_3 \rangle_G = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3+20a+12b+12c+15d & = & 0 \\ 12+20a-12b-12c & = & 0 \\ 15-20a+15d & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 0,\ b+c = 1,\ d = -1\ .$$

De même, $a' = 0, b'+c' = 1, d' = -1$.

De plus $\langle \chi_4, \chi_4 \rangle_5 = 1 \Rightarrow b^2+c^2 = 3$.

On a donc

$$b+c = 1,\ bc = -1 \Rightarrow b, c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\ .$$

De même, $b', c' = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Comme $\chi_4 \neq \chi_5$, on a (quitte à échanger χ_4 et χ_5) :

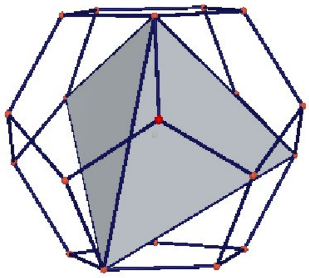
$$b = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ c = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$b' = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ c' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ .$$

Remarques.

a) En faisant agir G sur ses 6 sous-groupes d'ordre 5, on trouve un morphisme $G \to \mathfrak{S}_6$, $(12345) \mapsto (24613)$, $(123) \mapsto (134)(256)$. On en déduit une représentation irréductible de degré 5 de G par restriction d'une de $\mathfrak{S}_6$.

b) Voici une représentation irréductible de G de degré 3.



Le dodécaèdre de sommets $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm\tau^{-1}, \pm\tau, 0)$, $(0, \pm\tau^{-1}, \pm\tau)$, $(\pm\tau, 0, \pm\tau^{-1})$

$$(12345) \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\tau & \tau^{-1} \\ \tau & \tau^{-1} & -1 \\ \tau^{-1} & 1 & \tau \end{pmatrix}, (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) L'automorphisme $G \to G$, $g \mapsto (12)g(12)$ permet de passer de χ_4 à χ_5.