V — Table des caractères du groupe $\mathfrak{S}_5$

(en utilisant les valeurs propres)

Soit $G = \mathfrak{S}_5$.

a) Déterminer les classes de conjugaison de G et leurs cardinaux.

b) On note 1 la représentation triviale, ϵ la représentation signature et χ_4 la représentation standard de degré 4 obtenue en permutant les coordonnées de l'hyperplan

$$V = \{x \in \mathbb{C}^5 \ : \ x_1 + ... + x_5 = 0\} \ .$$

Vérifier que χ_4 et $\epsilon\chi_4$ sont deux représentations irréductibles.

c) Montrer que si χ est un caractère irréductible de degré impair, alors $\epsilon\chi$ aussi et $\epsilon\chi \neq \chi$.

d) En déduire, en considérant les degrés possibles, qu'il existe deux caractères irréductibles de degrés 5 et un de degré 6.

e) Compléter le tableau suivant.

	1	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(123)(45)
1	1	1	1	1	1	1	1
ϵ	1						
χ_4	4						
$\epsilon\chi_4$	4						
χ_5	5						
$\epsilon\chi_5$	5						
χ_6	6						

Voici quelques indications.

f) En utilisant que χ_5 est irréductible, vérifier que les valeurs propres de $\rho_5((12345))$ sont forcément $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ (remarquer que $(12345)^2$ est aussi un $5-$cycle). En déduire $\chi_5((12345)) = 0$.

g) De même, montrer que $\chi_5((123)) = -1$.

h) De même, montrer que $\chi_5((1234)) = \pm 1$. On supposera que c'est 1[†].

i) Compléter les lignes χ_5 et $\epsilon\chi_5$ en utilisant les relations d'orthogonalité.

j) Compléter la ligne χ_6.

†. Quitte à échanger χ_5 et $\epsilon\chi_5$.