V — Table des caractères du groupe $\mathfrak{S}_5$

(en utilisant les valeurs propres)

Correction

Soit $G = \mathfrak{S}_5$.

a) Déterminer les classes de conjugaison de G et leurs cardinaux.
- $\{1\}$
- Les $\binom{5}{2} = 10$ transpositions
- Les $\frac{5.4.3}{3} = 20$ 3−cycles
- Les $\frac{5.4.3.2}{4} = 30$ 4−cycles
- Les $\frac{5.4.3.2.1}{5} = 24$ 5−cycles
- Les $\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}}{2} = 15$ doubles-transpositions
- Les $\binom{5}{2}.\frac{3.2.1}{3} = 20$ produits d'un 3−cycle et d'une transposition à supports disjoints.

b) On note 1 la représentation triviale, ϵ la représentation signature et χ_4 la représentation standard de degré 4 obtenue en permutant les coordonnées de l'hyperplan

$$V = \{x \in \mathbb{C}^5 \ : \ x_1 + \ldots + x_5 = 0\} \ .$$

Vérifier que χ_4 et $\epsilon\chi_4$ sont deux représentations irréductibles.
Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation, alors $\epsilon\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, $g \mapsto \epsilon(g)\rho(g)$ aussi. De plus, $\chi_{\epsilon\rho} = \epsilon\chi_\rho$. De plus, comme $\forall\, g \in G$, $|\epsilon(g)| = 1 \Rightarrow \langle \epsilon\chi, \epsilon\chi\rangle_G = \langle \chi, \chi\rangle_G = 1$ pour tout caractère irréductible χ de G. Or $\forall\, g \in G$, $\chi_4(g) =$ le nombre de points fixes de g -1. Donc

$$\langle \chi_4, \chi_4\rangle_G = \frac{1}{120}(4^2 + 10.2^2 + 20.1^2 + 24.(-1)^2 + 20.(-1)^2) = 1$$

et χ_4 est un caractère irréductible. Remarquons que $\chi_4((12)) = 2 \Rightarrow (\epsilon\chi_4)((12)) = -2 \neq \chi_4((12))$ donc $\epsilon\chi_4 \neq \chi_4$.

c) Montrer que si χ est un caractère irréductible de degré impair, alors $\epsilon\chi$ aussi et $\epsilon\chi \neq \chi$. Soit τ une transposition. Soit ρ est une représentation de degré d impair d et de caractère χ. Alors comme $\tau^2 = 1$, $\rho(\tau)^2 = 1$ donc les valeurs propres de $\rho(\tau)$ sont ± 1.
Or $\chi(\tau) = \sum_\lambda \lambda = \sum \pm 1$ (somme des valeurs propres. Donc $\chi(\tau) = d \bmod 2 = 1 \bmod 2 \Rightarrow \chi(\tau) \neq 0$. Mais alors $(\epsilon\chi)(\tau) = -\chi(\tau) \neq \chi(\tau)$.

d) En déduire, en considérant les degrés possibles, qu'il existe deux caractères irréductibles de degrés 5 et un de degré 6.
Notons ϕ, χ, ψ les caractères irréductibles restants. Notons $a \leqslant b \leqslant c$ leurs degrés. On a :

$$1^2 + 1^2 + 4^2 + 4^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 120 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 86$$

$$\Rightarrow a \leqslant 5 \ .$$

Comme il n'y a que deux représentations de degré 1, $2 \leqslant a$. On essaie les valeurs suivantes $a = 2, 3, 4, 5$ et on trouve pour seule solution $a = b = 5$, $c = 6$.

e) Compléter le tableau suivant.

	1 1	(12) 10	(123) 20	(1234) 30	(12345) 24	(12)(34) 15	(123)(45) 20
1	1	1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	-1	1	1	-1
χ_4	4	2	1	0	-1	0	-1
$\epsilon\chi_4$	4	-2	1	0	-1	0	1
χ_5	5	a	-1	1	0	b	c
$\epsilon\chi_5$	5	$-a$	-1	-1	0	b	$-c$
χ_6	6	x	y	z	t	u	v

Voici quelques indications.

f) En utilisant que χ_5 est irréductible, vérifier que les valeurs propres de $\rho_5((12345))$ sont forcément $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ (remarquer que $(12345)^2$ est aussi un $5-$cycle). En déduire $\chi_5((12345)) = 0$. Comme $\rho_5((12345))5 = I_5$, les valeurs propres sont des racines $5-$èmes de l'unité. Si 1 est la seule valeur propre, alors $\chi_5((12345)) = 5$. Or

$$\langle \chi_5, \chi_5 \rangle_G = 1 \Rightarrow 1.5^2 + 24.|\chi_5((12345))|^2 \leqslant 120$$

$$\Rightarrow |\chi_5((12345))|^2 \leqslant \frac{95}{24} < 4 \Rightarrow |\chi_5((12345))| < 2 \ .$$

Donc une des valeurs propres est ω une racine primitive $5-$ème de l'unité. Comme (12345) et $(12345)^2 = (13524)$ sont conjugués dans G, $\rho_5((12345))$ et $\rho_5((12345))^2$ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$. Donc ω^2 aussi est une valeur propre de $\rho_5((12345))$ avec la même multiplicité que ω. De même pour ω^3 et ω^4. Comme il n'y a que 5 valeurs propres aucune de ces valeurs propres n'est de multiplicité > 1. Donc forcément, 1 aussi est valeur propre. Donc $\chi_5((12345)) = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

g) De même, montrer que $\chi_5((123)) = -1$.
On utilise l'orthonormalité des colonnes. On a en particulier :

$$|1|^2 + |\epsilon((123))|^2 + |\chi_4((123))|^2 + |(\epsilon\chi_4)((123))|^2$$

$$+|\chi_5((123))|^2 + |(\epsilon\chi_5)((123))|^2 + |\chi_6((123))|^2 = \frac{|G|}{20} = 6$$

$$\Rightarrow |\chi_5((123))| \leqslant 1 \ .$$

Or, comme $\rho_5((123))^3 = 1$, les valeurs propres de $\rho_5((123))$ sont $1, j$ ou j^2. Comme $(123)^2$ est conjugué à (123), si λ est une valeur propre de $\rho_5((123))$, λ^2 aussi et avec la même multiplicité. Donc les valeurs propres de $\rho_5((123))$ sont

$$1, 1, 1, 1, 1, 1$$
$$1, 1, 1, j, j^2$$
$$\text{ou } 1, j, j, j^2, j^2$$

donc $\chi_5((123)) = 5$, 2 ou -1.
Donc $\chi_5((123)) = -1$.

h) De même, montrer que $\chi_5((1234)) = \pm 1$. On supposera que c'est 1 [†]. Comme $\rho_5((1234))^4 = I_5$, les valeurs propres de $\rho_5((1234))$ sont dans $\{\pm 1, \pm i\}$. Or, les matrices $\rho_5((1234))^{-1}$ et $\rho_5((1234))$ sont conjuguées donc si λ est une valeur propre de $\rho_5((1234))$, λ^{-1} aussi et avec la même multiplicité. Donc les valeurs propres de $\rho_5((1234))$ sont :

$$\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1$$

$$\pm 1, \pm 1, \pm 1, i, -i$$

$$\pm 1, i, i, -i, -i$$

dans tous les cas, $\chi_5((1234)) \in \mathbb{Z}$ est un entier impair !
Or, par orthonormalité des colonnes, on a :

$$1^2 + (-1)^2 + 2.|\chi_5((1234))|^2 \leqslant \frac{120}{30} = 4$$

$$\Rightarrow |\chi_5(1234)| \leqslant 1 \ .$$

Donc $\chi_5((1234)) = \pm 1$.

i) Compléter les lignes χ_5 et $\epsilon\chi_5$ en utilisant les relations d'orthogonalité. Par orthogonalité des lignes, on a :

$$\langle \chi_5, 1 \rangle_G = \langle \chi_5, \epsilon \rangle_G = \langle \chi_5, \chi_4 \rangle_G = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 10 - 20 + 30 + 15b + 20c & = & 0 \\ 5 - 10a - 20 - 30 + 15b - 20c & = & 0 \\ 20 + 20a - 20 - 20c & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = c = -1, \ b = 1 \ .$$

j) Compléter la ligne χ_6. Par orthogonalité des colonnes (avec la colonne des degrés), on trouve :

$$1 - 1 + 8 - 8 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

et de même

$$y = z = 0, \ t = 1, \ u = -2, \ v = 0 \ .$$

†. Quitte à échanger χ_5 et $\epsilon\chi_5$.