VIII — Critère d'Eisenstein et irréductibilité des polynômes

Exercice 1 Irréductibilité sur $\mathbb{Q}$ par réduction modulo p premier.

a) En réduisant $\mod 2$, montrer que les polynômes $X^4 - X - 1$ et $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

b) Montrer que le polynôme X^4+1 est réductible sur $\mathbb{F}_p$ pour tout p premier. Le polynôme $X^4 + 1$ est-il irréductible sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 2 Critère d'Eisenstein Soit A un anneau *factoriel* de corps des fractions K.

Soit $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in A[X]$. Soit $p \in A$ irréductible tel que

i) $p|a_0, ..., a_{n-1}$;

ii) $p \not| a_n$;

iii) $p^2 \not| a_0$.

Théorème. Alors le polynôme P est irréductible sur$K$.

a) En raisonnant dans l'anneau $A/(p)[X]$, montrer le théorème.

b) En déduire que pour tout n il existe un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré n.

c) Montrer que les polynômes suivants

$$\frac{X^3}{3!}+\frac{X^2}{2!}+X+1,\ X^3-3X+1,\ X^5-5X+1,\ \Phi_p(X) = X^{p-1}+...+1,\ \ p \text{ premier.}$$

sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$. *Indications. Appliquer le critère d'Eisenstein éventuellement après le changement de variables $X \mapsto X + 1$ ou $X \mapsto X - 1$.*

d) Montrer que pour tout nombre premier p et tout entier $n \geqslant 1$, $\phi_{p^n}(X) = \Phi_p(X^{p^{n-1}})$ et en déduire que $\Phi_{p^n}(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

e) Montrer que le polynôme $X^3 + Y^3 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X, Y]$.

f) Montrer que le polynôme $XY - ZT$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X, Y, Z, T]$.