21,5/20

Master 1
2020–2021

29 mars 2021

Partiel : Corps et anneaux commutatifs

Durée : 2 heures

Les documents ne sont pas autorisés
Les réponses doivent être justifiées

Exercice 1 Soient $\mathbf{k}$ un corps, $\overline{\mathbf{k}}$ sa clôture algébrique, et $n \in \mathbb{N}$. Notons par G l'ensemble des racines de $X^n - 1$ dans $\overline{\mathbf{k}}$ et par $\mathbb{K}$ le corps de décomposition de $X^n - 1$ dans $\overline{\mathbf{k}}$.

(a) L'extension $\mathbb{K}/\mathbf{k}$ est-elle toujours une extension :

1,5
- (i) normale ?
- (ii) séparable ?
- (iii) galoisienne ?

1,5 (b) Soit $|G| = m$. Montrer que m divise n et $m = n$ si et seulement si $car(\mathbf{k})$ ne divise pas n.

1,5 (c) Trouver la valeur exacte de m en fonction de la décomposition de n en produit de nombres premiers.

Exercice 2 Soit $P(X) = \frac{X^3}{3!} + \frac{X^2}{2} + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

1 (a) Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

1 (b) Justifier que P a trois racines distinctes.

1 (c) Déterminer les racines de P' dans $\mathbb{C}$.

1,5 (d) On rappelle la formule suivante pour le calcul de résultant des polynômes A, B de degrés m et n et de coefficient dominants a et b :

$$\mathrm{Res}_{m,n}(A,B) = (-1)^{mn} b^m \prod_{1 \le j \le n} A(y_j) = a^n \prod_{1 \le i \le m} B(x_i),$$

où $x_1, ..., x_m$ sont les racines de A et $y_1, ..., y_n$ sont les racines de B. À l'aide de la question précédente, trouver le discriminant $\Delta(P)$. (Rappelons que pour un polynôme UNITAIRE F de degré $n \geq 2$, $\Delta(F) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathrm{Res}_{n,n-1}(F, F')$.)

1,5 (e) Notons x_1, x_2, x_3 les racines de Q. En déduire que P a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées non-réelles. On notera x_1 la racine réelle et $x_3 = \overline{x_2}$.

2 (f) L'extension $\mathbb{Q}(x_1)$ est-elle galoisienne ? Déterminer $[\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3) : \mathbb{Q}]$.

1 (g) Soit G le groupe de Galois de Q sur $\mathbb{Q}$. Quel est l'ordre de G ?

1 (h) Justifier que si $g \in G$, alors g induit une permutation de l'ensemble $\{x_1, x_2, x_3\}$.

2 (i) Montrer que l'application $G \to \mathfrak{S}_{x_1,x_2,x_3}$, $g \mapsto g_{|\{x_1,x_2,x_3\}}$, est injective. En déduire que $G \simeq \mathfrak{S}_3$.

Exercice 3 1 (a) Déterminer l'unique polynôme irréductible de degré 2 sur $\mathbb{F}_2$.

1 (b) En déduire que $X^4 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_2$.

1 (c) Soit α une racine de $X^4 + X + 1$ dans une extension du corps $\mathbb{F}_2$. Quel est le cardinal du corps $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$?

2 (d) Montrer que $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ forment une base de K comme $\mathbb{F}_2$−espace vectoriel. Exprimer α^5 dans cette base et en déduire que $\langle \alpha \rangle = K^*$.