Feuille de TD n° 11

Exercice 1 Irréducibilité de $X^p - a$

Soit p un nombre premier. Soient K un corps et $a \in K$.

Montrer que $X^p - a$ est irréductible sur $K \Leftrightarrow X^p - a$ n'a pas de racines dans K.

Indication. Si $f(X) \in K[X]$ est un facteur irréductible de $X^p - a$, considérer $(z_1 ... z_d)^p$ où $z_1, ..., z_d$ sont les racines de f.

Exercice 2 Théorème d'Artin-Schreier

Soit K un corps de caractéristique non nulle p.

a) Soit $a \in K$. Soit $f(X) = X^p - X - a$. Montrer que f est scindé sur K ou f est irréductible sur K. Dans ce dernier cas, si α est une racine de f (dans une extension de K), montrer que $K(\alpha)/K$ est galoisienne de groupe de Galois $\simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

b) Réciproquement, supposons que L/K est galoisienne cyclique de degré p. Soit σ un générateur du groupe de Galois de L sur K. Montrer que l'endomorphisme $K-$linéaire de L :

$$S : \alpha \mapsto \alpha - \sigma(\alpha)$$

est nilpotent.

c) Soit $\alpha \in \ker S^2 \setminus \ker S$. Montrer que $\beta = \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)-\alpha}$ vérifie $\sigma(\beta) = \beta + 1$.

d) En déduire que β vérifie une équation de la forme $X^p - X - a = 0$ avec $a \in K$.

Exercice 3 a) Montrer que le polynôme $X^3 - 3X + 1$ est résoluble par radicaux en calculant son groupe de Galois.

b) Vérifier que ses racines sont $2\cos\frac{2\pi}{9}$, $2\cos\frac{4\pi}{9}$, $2\cos\frac{8\pi}{9}$.

c) Trouver une extension radicale qui les contient :

$$\mathbb{Q} = K_0 < K_1 < K_2 < ... < K_n$$

avec pour tout i, $K_i = K_{i-1}(\alpha_i)$ pour un certain $\alpha_i \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha_i^{n_i} \in K_{i-1}$ pour un certain n_i entier.

d) Montrer que si $2\cos\frac{2\pi}{9}$, $2\cos\frac{4\pi}{9}$, $2\cos\frac{8\pi}{9} \in K_n$, alors on ne peut pas choisir tous les α_i réels.

e) Quel est le groupe de Galois du polynôme $X^3 - X - 1$? Donner une extension radicale qui contient toutes ses racines.

Exercice 4 a) Soit $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$. Déterminer les sous-corps de K. *Indication. On rappelle que $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois $\simeq D_4$, groupe diédral d'ordre 8.*

b) Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})})$. Déterminer les sous-corps de K. *Indication. On rappelle que $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois $\simeq Q_8$, groupe des quaternions.*

Exercice 5 Soit $n \geq 2$ un entier.

a) Soit p un nombre premier de la forme $1 \bmod n$. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif de groupes

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ .$$

En déduire qu'il existe une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois $\simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $1 \bmod n$.

Indication. Si $p_1 \dots p_N$ sont des nombres premiers de la forme $1 \bmod n$, considérer un diviseur premier q de $\Phi_n(lnp_1 \dots p_N)$ pour $l >> 0$.

c) En déduire que si G est un groupe abélien fini, il existe une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois isomorphe à G.