Feuille de TD n° 12
Groupe de Galois des quartiques

Exercice.
On note V le sous-groupe $\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ de S_4.

a) Montrer que V est distingué dans S_4 et que $V \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Soit G un sous-groupe transitif de S_4. Montrer que G est

$$S_4, A_4, V \text{ ou un sous-groupe isomorphe à } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \text{ ou } D_4$$

(on note D_4 le groupe diédral d'ordre 8 (c'est le groupe des isométries du carré)).

c) Soit $P(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$ un polynôme irréductible à coefficients dans un corps k de caractéristique $\neq 2, 3$. Vérifier que $P(X)$ a 4 racines distinctes, x_1, x_2, x_3, x_4 dans son corps de décomposition L.

d) On pose

$$\theta_1 = (x_1+x_2)(x_3+x_4) \ , \ \theta_2 = (x_2+x_3)(x_1+x_4) \ , \ \theta_3 = (x_3+x_1)(x_2+x_4) \ .$$

Montrer que $R(X) = (X-\theta_1)(X-\theta_2)(X-\theta_3) = X^3-2pX^2+(p^2-4r)X+q^2$.

e) Montrer que $\theta_1 - \theta_2 = (x_3 - x_1)(x_2 - x_4)$. En déduire que $R(X)$ et $P(X)$ ont le même discriminant Δ.

f) Soit G le groupe de Galois de L sur k. On note $G_1 = G \cap V$. Montrer que

$$L^{G\cap V} = k(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

le corps de décomposition de $R(X)$ sur k. On pose $M = k(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

g) Montrer que le tableau suivant décrit bien toutes les possibilités pour le groupe de Galois du polynôme $P(X)$ sur k :

$\Delta \notin k^2$	$R(X)$ irréductible sur k		$G = S_4$
$\Delta \in k^2$	$R(X)$ irréductible sur k		$G = A_4$
$\Delta \in k^2$	$R(X)$ scindé sur k		$G = V$
$\Delta \notin k^2$	$R(X)$ a une racine dans k	$P(X)$irréductible sur M	$G \cong D_4$
$\Delta \notin k^2$	$R(X)$ a une racine dans k	$P(X)$réductible sur M	$G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

h) *Applications :* Montrer que si le polynôme $X^4 + bX^2 + d$ est irréductible sur k, alors son groupe de Galois est V si d est un carré dans k, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si $d \notin k^2$ et $\frac{b^2}{d} - 4 \in k^2$ et D_4 sinon.
Déterminer les groupes de Galois sur $\mathbb{Q}$ des polynômes $X^4 - X - 1$ et $X^4 + 8X + 12$.