Feuille de TD n° 13
sur le théorème des zéros de Hilbert

Exercice 1 un exemple d'anneau non nœthérien
Soit $A = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{X^i}{i!} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ ^{\forall} i, \ a_i \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Montrer que l'anneau A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$.

b) Montrer que la suite d'idéaux $I_n = \left(X, ..., \frac{X^n}{n!} \right)$ est croissante.

c) Montrer que si p est premier, alors $I_{p-1} \neq I_p$.

d) En déduire que A n'est pas nøthérien.

e) Montrer que $I_5 = I_6$.

Exercice 2 nombre minimal arbitraire de générateurs
Montrer que dans $\mathbb{C}[X, Y]$, l'idéal $(X, Y)^n$ peut être engendré par $n + 1$ éléments mais pas moins. *Indication. Considérer le* $\mathbb{C}-$*espace vectoriel* $(X, Y)^n/(X, Y)^{n+1}$.

Exercice 3 sous-ensembles algébriques affines
Si $V \subseteq \mathbb{C}^n$, on pose $I(V) = \{ f \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \ : \ ^{\forall} v \in V, \ f(v) = 0 \}$.

a) Montrer que $V \subseteq \mathbb{C}^n$ est un sous-ensemble algébrique affine si et seulement si $V = V(I(V))$.

b) Soit $E \leq \mathbb{C}^n$ un sous-espace vectoriel. Montrer que E est un sous-ensemble algébrique affine.

c) Soit $V = \{ (t^2, t^3) \ : \ t \in \mathbb{C} \}$. Trouver un élément non nul de l'idéal $I(V)$ et déterminer $I(V)$. Montrer que V est un sous-ensemble algébrique affine de $\mathbb{C}^2$. *Indication montrer que* $V = V(I(V))$.

d) Soit $V = \{ (t, t^2, t^3) \ : \ t \in \mathbb{C} \}$. Montrer que $V = V(Y - X^2, Z - X^3)$. Montrer que $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(Y - X^2, Z - X^3) \simeq \mathbb{C}[T]$. En déduire $I(V)$.

e) Soit $V = \{ (t^3, t^4, t^5) \ : \ t \in \mathbb{C} \}$. Montrer que $V = V(Y^2 - XZ, X^2 - YZ, X^2Y - Z^2)$. Montrer que $I(V) = (Y^2 - XZ, X^2 - YZ, X^2Y - Z^2)$. †

f) Montrer que $V = \{ (x, xy) \ : \ x, y \in \mathbb{C} \}$ n'est pas un sous-ensemble algébrique affine de $\mathbb{C}^2$.

g) Montrer que $V = \{ (t, \sin t) \ : \ t \in \mathbb{C} \}$ n'est pas un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{C}^2$. *Indication. Montrer que si* $P \in I(V)$, *alors* $P(X, 0) = 0$.

h) Montrer qu'un sous-ensemble algébrique affine de $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ est soit $\mathbb{A}^1$, soit fini, soit vide.

Exercice 4
Soit $I = \langle X^2Y^3, XY^4 \rangle \leq \mathbb{C}[X, Y]$.

a) Déterminer $V(I)$ et $I(V(I)$.

b) Déterminer $\sqrt{I}$.

Exercice 5 Soit $I = (X - Y, (X + Y)^2) \leq \mathbb{C}[X, Y]$

a) En utilisant le théorème des zéros de Hilbert, montrer que $X \in \sqrt{I}$.

b) A-t-on $X \in I$? *Indication. Non.*

†. On peut montrer que $I(V)$ ne peut pas être engendré par strictement moins de trois éléments. Cependant V peut être défini par deux équations : $V = V(XZ - Y^2, X^5 - 2X^2YZ + Z^3)$.

Exercice 6

Soit $P \in \mathbb{C}[X,Y]$.

Montrer que $X^2+Y^2-1|P$ dans $\mathbb{C}[X,Y] \Leftrightarrow$

$$^{\forall}t \in \mathbb{R},\ P(\cos t, \sin t) = 0\ .$$

Exercice 7 Soit I un idéal de $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$. En utilisant le théorème des zéros de Hilbert, montrer que $\sqrt{I}$ est l'intersection des idéaux maximaux qui contiennent I.

Exercice 8 une version du théorème des zéros de Hilbert pour les corps non algébriquement clos

Soit k un corps. Soit $B = k[x_1,...,x_n]$ une $k-$algèbre de type fini qui est un corps. Montrons par récurrence sur n que $x_1,...,x_n$ sont algébriques sur k.

a) Montrer le résultat dans le cas où k est algébriquement clos (en utilisant le théorème des zéros de Hilbert).

b) Montrer le cas $n=1$.

c) On suppose que le résultat est vrai pour $n-1$, $n \geq 1$. En particulier $x_2,...,x_n$ sont algébriques sur $k(x_1)$. Montrer qu'il existe $0 \neq f \in k[x_1]$ tel que $x_2,...,x_n$ sont entiers sur $k[x_1]_f = \{\frac{a}{f^N}\ :\ N \geq 0,\ a \in k[x_1]\}$ †.

d) En déduire que $k[x_1]_f$ est un corps.

e) En déduire que x_1 est algébrique sur k et conclure !

f) En déduire qu'une $\mathbb{Z}-$algèbre de type fini qui est un corps est un corps fini.

†. on dit que x est entier sur un anneau A s'il existe un polynôme unitaire dans $A[X]$ qui annule x.