Feuille de TD n° 2

Exercice 1 un polynôme de groupe de Galois $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

Soit $x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

a) Déterminer le polynôme minimal P de x sur $\mathbb{Q}$.

b) Déterminer toutes les racines de P. On les note x_1, x_2, x_3, x_4, où $x_1 = x$.

c) Montrer que $Q(x) = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4)$

d) Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}\mathbb{Q}(x)$ est cyclique d'ordre 4 engendré par l'automorphisme $\theta : x \mapsto \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Exercice 2 un polynôme de groupe de Galois $\mathfrak{S}_3$

On pose $x_1 = \sqrt[3]{2}, x_2 = j\sqrt[3]{2}, x_3 = j^2\sqrt[3]{2}$.

Soit $G = \mathrm{Aut}\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3)$.

a) Montrer que $\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ et en déduire $[\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3) : \mathbb{Q}]$.

b) Montrer que l'application $G \to \mathfrak{S}_{x_1,x_2,x_3}$, $g \mapsto g\big|_{\{x_1,x_2,x_3\}}$ est bien définie et que c'est un morphisme injectif de groupes.

c) Justifier l'existence de $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\sqrt[3]{2}) = j\sqrt[3]{2}$ et $\sigma(j) = j$ et de $\tau \in G$ tel que $\tau(j) = j^2$ et $\tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$.

d) Après avoir déterminé les images de σ, τ dans $\mathfrak{S}_{\{x_1,x_2,x_3\}}$, montrer que $G = \langle \sigma, \tau \rangle$.

e) Trouver un polynôme rationnel P de degré 6 qui annule $\sqrt[3]{2} + j$.

f) Montrer que les $g(\sqrt[3]{2}+j)$, $g \in G$ sont deux à deux distincts et que ce sont les racines de P !. En déduire que P est irréductible et que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+j) = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3)$.

Exercice 3 un polynôme de groupe de Galois $\mathfrak{S}_n$

Soit $P(X) = X^n - X - 1$.

a) Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$.

b) Montrer que les racines complexes de P sont simples.

c) Si Q est un polynôme à coefficients entiers qui divise P, on pose $S(Q) = \sum_z (z - \frac{1}{z})$ où z décrit les racines de Q. Montrer que $S(Q) \in \mathbb{Z}$.

d) Soit z une racine de P. On pose $z = re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $r \neq 1$ puis que $2\mathrm{R}e(z - \frac{1}{z}) > \frac{1}{r^2} - 1$.

e) Montrer que $S(Q) \geq 1$.

f) En déduire que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 4 le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

(H_n) tout polynôme réel de degré $2^n q$ où q est impair a une racine dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que (H_0) est vraie.
On suppose que (H_{n-1}) est vraie, $n \geq 1$.

b) Soit P un polynôme réel de degré $d = 2^n q$, q impair irréductible sur $\mathbb{R}$. On note $x_1, ..., x_d$ ses racines dans K une extension de $\mathbb{C}$. Montrer que les x_i sont deux à deux distinctes et que pour tout $c \in \mathbb{R}$, il existe $1 \leq i < j \leq d$ tel que $z_c = x_i + x_j + c x_i x_j \in \mathbb{C}$.

c) En déduire l'existence d'un couple $1 \leq i < j \leq d$ tel que $x_i + x_j$ et $x_i x_j \in \mathbb{C}$. En déduire que l'un des $x_i \in \mathbb{C}$.

d) Montrer que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Exercice 5 $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$

Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{17}}$. On note $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta))$ et θ l'automorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}(\zeta) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\zeta) \\ \zeta & \longmapsto & \zeta^3 . \end{array}$$

Si $H \leq G$ est un sous-groupe, on posera

$$\zeta_H = \sum_{h \in H} h(\zeta) \ .$$

On notera H_d l'unique sous-groupe de G d'ordre d si $d|16$.

a) Déterminer le polynôme minimal de ζ sur $\mathbb{Q}$. En déduire que θ est bien défini et que c'est un automorphisme.

b) Montrer que $G = \langle \theta \rangle$.

c) Exprimer ζ_{H_8} et $\theta(\zeta_{H_8})$. *Indication :* $(X - \zeta_{H_8})(X - \theta(\zeta_{H_8})) = X^2 + X - 4$.

d) Exprimer ζ_{H_4} et $\theta^2(\zeta_{H_4})$. *Indication :* $(X - \zeta_{H_4})(X - \theta^2(\zeta_{H_4})) = X^2 - \theta(\zeta_{H_8})X + 1$.
En déduire $\theta(\zeta_{H_4})$.

e) Exprimer ζ_{H_2} et $\theta^4(\zeta_{H_2})$. *Indication :* $(X - \zeta_{H_2})(X - \theta^4(\zeta_{H_2})) = X^2 - \zeta_{H_4}X + \theta(\zeta_{H_4})$.

f) Montrer que $2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) =$

$$-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{4}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \ .$$

Exercice 6 construction d'une clôture algébrique

a) Soit $K \leq L$ une extension algébrique. On suppose que tout polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$ a une racine dans L. Montrer que L est algébriquement clos.

b) En déduire que $\overline{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{C} \ : \ x \text{ est algébrique sur } \mathbb{C}\}$ est un corps algébriquement clos.

c) Soit K un corps. On note I l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires sur K. Pour tout $f \in I$ soit X_f une *variable*. Montrer que dans l'anneau $A = K[X_i \, : \, i \in I]$, l'idéal $\mathfrak{I}$ engendré par les polynômes $f(X_f)$, $f \in I$ est propre.

Indication. Si $(*)$ $\sum_{i=1}^n p_i f_i(X_{f_i}) = 1$ *pour une certaine famille finie* $p_1, ..., p_n \in A$ *et* $f_1, ..., f_n \in I$*, alors considérer une extension* K' *de* K *où tous les* f_i *ont une racine* $z_i \in K'$*. Obtenir une contradiction en remplaçant dans l'égalité* $(*)$ *chaque variabe* X_{f_i} *par* z_i *et les autres variables par* 0 *...*

d) Soit m un idéal maximal de A qui contient $\mathfrak{I}$. Montrer que A/m est une extension algébrique de K. En déduire l'existence d'une extension algébrique algébriquement close pour tout corps K (*théorème de Steinitz*).