Feuille de TD n° 3

Exercice 1 sur le résultant

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ qu'on écrit $P(X) = a\Pi_{i=1}^m(X-x_i)$, $Q(X) = b\Pi_{j=1}^n(X-y_j)$, où les racines x_i, y_j se trouvent dans une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$.
On rappelle que $\text{Rés}_{m,n}(P,Q) = a^n b^m \Pi_{i,j}(x_i - y_j)$.
On sait que $\text{Rés}_{m,n}(P,Q)$ est un polynôme en les coefficients de P et Q.

a) Soit $T(X) \in K[X]$. Soit $R_1(Z) = \text{Rés}_X(P(X), Z - T(X))$. Montrer que si α est une racine de $P(X)$, alors $T(\alpha)$ est une racine de $R_1(Z)$.

b) Soit $R_2(Z) = \text{Rés}_X(P(X), Q(Z - X))$. Montrer que si α est une racine de $P(X)$ et β une racine de $Q(X)$ alors $\alpha + \beta$ est une racine de $R_2(Z)$.

c) Soit $R_3(Z) = \text{Rés}_X(P(X), X^nQ(\frac{Z}{X}))$ (où n est le degré de Q). Montrer que si α est une racine de $P(X)$ et β une racine de $Q(X)$, alors $\alpha\beta$ est une racine de $R_3(Z)$.

d) Soit $T(X,Y) \in K[X,Y]$. Soit $R_4(Z) = \text{Rés}_X\Big(P(X), \text{Rés}_Y\big(Z-T(X,Y), Q(Y)\big)\Big)$. Montrer que si α est une racine de $P(X)$ et β une racine de $Q(X)$, alors $T(\alpha,\beta)$ est une racine de $R_4(Z)$.

Exercice 2 racines d'une quartique

Soit $P(X) = X^4 - X - 1$.

a) En réduisant modulo 2, montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

b) Montrer que les racines complexes de P sont deux à deux distinctes. On les note x_1, x_2, x_3, x_4.

c) On pose $z_1 = x_1 + x_2$, $z_2 = x_1 + x_3$, $z_3 = x_1 + x_4$. Montrer que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et en déduire que $\mathbb{Q}(z_1, z_2, z_3) = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

d) Donner les coefficients du polynôme $(X - z_1^2)(X - z_2^2)(X - z_3^2)$ † et après avoir calculé $(z_1^2 - z_2^2)^2(z_1^2 - z_3^2)^2(z_2^2 - z_3^2)^2$ donner $[\mathbb{Q}(z_1^2, z_2^2, z_3^2) : \mathbb{Q}]$.

e) Montrer que $x_1 \notin \mathbb{Q}(z_1^2, z_2^2, z_3^2)$ et en déduire les valeurs possibles pour $[\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4) : \mathbb{Q}]$.

f) Montrer que $[\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4) : \mathbb{Q}] = 24$.

g) Essayer de donner une expression par radicaux de x_1, x_2, x_3, x_4.

†. Indication. $z_1^2 = -(x_1+x_2)(x_3+x_4)$, $z_2^2 = -(x_1+x_3)(x_2+x_4)$, $z_3^2 = -(x_1+x_4)(x_2+x_3)$.