Feuille de TD n° 4

Exercice 1 sur le résultant

a) Montrer que $\text{Rés}_{p,0}(P, a) = a^p$.

b) Montrer que $\text{Rés}_{p,1}(P, X - a) = P(a)$.

c) Montrer que $\text{Rés}_{p,q}(P, Q) = (-1)^{pq}\text{Rés}_{q,p}(Q, P)$.

d) Montrer que $\text{Rés}_{p,q+r}(P, QR) = \text{Rés}_{p,q}(P, Q)\text{Rés}_{p,r}(P, R)$.

Exercice 2 sur le discriminant

Soit $P(X) = a_0X^n + ... + a_n \in \mathbb{C}[X]$. On note $x_1, ..., x_n$ les racines complexes de $\mathbb{C}$. On pose

$$\Delta_P = a_0^{2n-2} \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_i - x_j)^2$$

$$= a_0^{2n-2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1\leq i\neq j\leq n} (x_i - x_j) \ .$$

a) Montrer que $\Delta_P \in \mathbb{Z}[a_0, ..., a_n]$.

b) Calculer Δ_P si P est de degré 2.

c) Si P est de degré 3, montrer que

$$\Delta_P = a_1^2a_2^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_0^2a_3^2 + 18a_0a_1a_2a_3 \ .$$

Indications. Montrer que $\Delta = a\sigma_1^6 + b\sigma_1^4\sigma^2 + c\sigma_1^3\sigma_3 + d\sigma_1^2 + e\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + f\sigma_2^3 + g\sigma_3^2$ *; puis en prenant* $x_3 = 0$*, montrer que* $a = b = 0$ *et trouver* d, f*. Puis traiter le cas où* $\sigma_2 = 0$*, etc*

d) Si P est réel de degré 3, montrer que $\Delta_P > 0 \Leftrightarrow P$ a trois racines réelles distinctes et que $\Delta_P < 0 \Leftrightarrow P$ a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées non réelles.

e) Montrer que $\Delta_P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n P'(x_i)$ si P est unitaire.

f) Montrer que P est à racines simples $\Leftrightarrow \Delta_P \neq 0 \Leftrightarrow P' \wedge P = 1$.

g) *Lien avec le résultant.* Montrer que

$$\text{Rés}_{n,n-1}(P, P') = a_0(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta_P = \text{Rés}_{n-1,n}(P', P) \ .$$

En déduire que $\Delta_P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a_0^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} P(y_i)$ où $y_1, ..., y_{n-1}$ sont les racines de P'.

h) Calculer le discriminant de $X^n - 1$ et celui de $\frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + ... + 1$.

i) Montrer que si P, Q sont respectivement de degrés p, q, alors

$$\Delta_{PQ} = \text{Rés}^2_{p,q}(P,Q)\Delta_P\Delta_Q \ .$$

Exercice 3 Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de cardinal q. Montrer que dans son corps de décomposition sur $\mathbb{F}_q$, le polynôme $X^{q^n} - X$ est à racines simples. Montrer que le corps de décomposition de X^{q^n} sur $\mathbb{F}_q$ est l'ensemble de ses racines et a pour cardinal q^n.

Exercice 4 théorème de Bézout (version faible) Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X,Y]$ deux polynômes premiers entre eux de degrés respectifs m et n.
On note $V(P) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \ : \ \ P(x,y) = 0\}$.
Le but de l'exercice est de montrer que $\text{Card}(V(P) \cap V(Q)) \leq mn$.

a) Trouver un exemple pour montrer que l'inégalité stricte est possible.
b) Soit $R \in \mathbb{C}[X]$ le résultant de P et Q vus dans $\mathbb{C}[X][Y]$. Montrer que $\deg(R) \leq mn$.
c) En déduire que $\text{Card}(V(P) \cap V(Q)) \leq m^2n^2$.
d) Notons $\Gamma = V(P) \cap V(Q)$.
Soient alors deux droites D et D' de $\mathbb{C}^2$ telles que la droite qui joint deux points quelconques de Γ ne soit parallèle ni à D ni à D'. (Ces deux droites existent car $\mathbb{C}$ est infini.)
En utilisant un changement de coordonnées affine basé sur les droites D et D', montrer que $\text{Card}(\Gamma) \leq mn$.