Feuille de TD n° 5

Exercice 1 On dit qu'un élément x algébrique sur un corps K est séparable si son polynôme minimal sur K est séparable. Montrer que si K est de caractéristique nulle ou **si K est fini**, tout élément algébrique sur K est séparable.

Exercice 2 Soit p un nombre premier. Montrer que le polynôme $X^p - t$ est irréductible mais n'est pas séparable sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_p(t)$.

Exercice 3

a) Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un automorphisme de corps. Montrer que σ est l'identité.

b) Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.

c) Montrer que l'identité est le seul morphisme de corps $\mathbb{F}_p(t^p)-$linéaire du corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_p(t)$.

d) Montrer qu'il existe précisément trois automorphismes du corps $\mathbb{Q}\left(\cos\frac{2\pi}{9}\right)$: l'identité, celui qui envoie $\cos\frac{2\pi}{9}$ sur $\cos\frac{4\pi}{9}$ et son inverse. *Indication. Le polynôme $X^3 - 3X + 1$ a pour racine $2\cos\frac{2\pi}{9}$ ...*

Exercice 4

a) Justifier l'existence de deux automorphismes r, s du corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ tels que :

$$r(\sqrt[4]{2}) = i\sqrt[4]{2},\ r(i) = i,\ s(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2},\ s(i) = -i\ .$$

Montrer que $|\mathrm{Aut}(K)| \leq 8$.

b) Montrer que $\mathrm{Aut}(K)$ est engendré par r, s et que $|\mathrm{Aut}K| = 8$.

c) En considérant les images $g(i + \sqrt[4]{2})$, $g \in \mathrm{Aut}(K)$, montrer que $\mathbb{Q}(i + \sqrt[4]{2}) = K$ et donner le polynôme minimal de $i + \sqrt[4]{2}$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 5

Soit G le sous-groupe des automorphismes du corps $\mathbb{C}(t)$ engendré par les « changements de variable » $\sigma : t \mapsto 1 - t$ et $\tau : t \mapsto t^{-1}$.

a) Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ (*Indication. On peut calculer $\sigma \circ \tau, \tau \circ \sigma$, etc*).

b) Montrer que a fraction $f = \frac{(t^2-t+1)^3}{(t^2-t)^2}$ est dans $\mathbb{C}(t)^G$.

c) Montrer que t est algébrique sur $\mathbb{C}(f)$ de degré ≤ 6.

d) En considérant les racines du polynôme minimal de t sur le corps $\mathbb{C}(t)^G$, montrer que $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(t)^G] = 6$.

e) En déduire que $\mathbb{C}(t)^G = \mathbb{C}(f)$.

Exercice 6 extension algébrique primitive

On dit qu'une extension de corps algébrique $K \leq L$ est *primitive* s'il existe $x \in L$ tel que $L = K(x)$.

Soit $K \leq L$ une extension algébrique.

a) Si L est fini, montrer que L est primitive sur K.

b) Montrer que l'extension est primitive $\Leftrightarrow$ il existe un nombre fini de corps intermédiaires $K \leq M \leq L$. *Indications.* $\Rightarrow$: *si* $L = K(x)$ *et si* $K \leq M \leq L$, *alors* M *est engendré par* K *et les coefficients du polynôme minimal de* x *sur* M *or ce polynôme divise le polynôme minimal de* x *sur* K *...* $\Leftarrow$: *supposons* $x, y \in L$, *montrer que si* K *est infini, il existe* $t_1 \neq t_2 \in K$ *tels que* $K(x + t_1 y) = K(x + t_2 y)$ *en déduire qu'il existe* $z \in L$ *tel que* $K(z) = L$ *...*

c) Soient $K = \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$, $L = \mathbb{F}_p(X, Y)$. Montrer que $[L : K] = p^2$. Montrer que pour tout $t \in K$, le corps $K(X + tY)$ est de degré p sur K En déduire que les corps $K(X + tY)$, $t \in K$ sont deux à deux distincts ! En déduire qu'il n'existe pas de $z \in L$ tel que $L = K(z)$.