Feuille de TD n° 6

Exercice 1 (Le corps des nombres constructibles) Soit $\mathcal{C}$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ stable par $\sqrt{\ }$. On appelle $\mathcal{C}$ *le corps des nombres constructibles.*

1. Montrer que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $e^{\frac{2i\pi}{15}}$ et $e^{\frac{2i\pi}{17}}$ sont constructibles.
2. Vérifier qu'un nombre est constructible si et seulement s'il existe une suite finie d'extensions quadratiques $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset ... \subset K_n$ telle que $x \in K_n$. Montrer que x est constructible si et seulement si son polynôme minimal a un groupe de Galois de degré une puissance de 2 (autrement dit si et seulement si x est dans une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de degré une puissance de 2).
3. Montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.
4. Montrer que $e^{2i\pi/n}$ est constructible si et seulement si $n = 2^r p_1...p_s$ où $p_1 < ... < p_s$ sont des nombres premiers de la forme : $p_i = 2^{2^{k_i}} + 1$.

Exercice 2 (Les points constructibles) Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on définit par récurrence : $P_0 = \{0, 1\}$, et si $n \geq 1$, P_n est l'ensemble des points de P_{n-1} et des points obtenus de la manière suivante :

- on trace toutes les droites reliant deux points de P_{n-1}, tous les cercles centrés en un point de P_{n-1} et de rayon une distance entre deux points de P_{n-1} ;
- on prend toutes les intersections obtenues (entre deux droites, deux cercles, un cercle et une droite).

On appelle $\cup_{n\geq 0} P_n \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble des points *constructibles à la règle et au compas.*

(a) Déterminer P_1 et P_2.

(b) On rappelle que l'on peut construire à la règle et au compas la médiatrice de deux points, la perpendiculaire à une droite passant par un point donné, la parallèle à une droite passant par un point donné. En déduire que si z_1, z_2 sont constructibles, alors $z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2, z_1/z_2$ le sont aussi.

(c) Montrer que les racines carrées d'un nombre constructible le sont aussi.

(d) Montrer qu'un $z \in \mathbb{C}$ est constructible si et seulement si le point correspondant dans $\mathbb{R}^2$ est constructible à la règle et au compas.

Exercice 3 un nombre de degré 4 non constructible Soit $P(X) = X^4 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Montrer que P est irréductible $\bmod 2$. En déduire que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

b) On note x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de P dans $\mathbb{C}$. On pose $z_1 = x_1 + x_2$, $z_2 = x_1 + x_3$, $z_3 = x_1 + x_4$. En utilisant les relations entre les coefficients du polynôme P et ses racines x_i, montrer que :

$$(X - z_1^2)(X - z_2^2)(X - z_3^2) = X^3 + 4X - 1 \ .$$

c) En déduire que les x_i ne sont pas constructibles ! *Indication. Le polynôme $X^3 + 4X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.*