# Feuille de TD n° 7

## Exercice 1

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

a) Montrer que l'extension $\mathbb{Q} < K$ est galoisienne. *Indication. C'est un corps de décomposition !*

b) Soit $\sigma \in G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, montrer que $\sigma(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$.
Montrer que l'application : $G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\sigma \mapsto ((-1)^{\epsilon_1}, (-1)^{\epsilon_2}, (-1)^{\epsilon_3})$, où $\sigma(\sqrt{2}) = (-1)^{\epsilon_1}\sqrt{2}$, *respectivement* $\sigma(\sqrt{3}) = (-1)^{\epsilon_2}\sqrt{3}$, *respectivement* $\sigma(\sqrt{5}) = (-1)^{\epsilon_3}\sqrt{5}$ est un morphisme de groupes injectif.

c) Montrer que $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d) Montrer que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$ *Indication. Considérer les images possibles de* $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ *par un automorphisme de* $K$.

e) Donner le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sur $\mathbb{Q}$.

## Exercice 2

Soit $P(X) = X^4 + aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible. On note $\pm\alpha$ et $\pm\beta$ ses racines.

a) Montrer que $\alpha\beta = \pm\sqrt{b}$ et que $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{b} - 4}$.

b) On note $G$ le groupe de Galois de $P$ sur $\mathbb{Q}$. On identifiera ses éléments à des éléments du groupe des permutations de $\{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$.
Montrer que $G$ est contenu dans le sous-groupe :

$$\{1;(\alpha,-\alpha);(\beta,-\beta);(\alpha,-\alpha)(\beta,-\beta);(\alpha,\beta)(-\alpha,-\beta);(\alpha,\beta,-\alpha,-\beta);(\alpha,-\beta,-\alpha,\beta);(\alpha,-\beta)(-\alpha,\beta)\}.$$

*Indication. Si* $\sigma \in G$, *alors* $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$ *et* $\sigma(-\beta) = -\sigma(\beta)$.

c) Vérifier que le sous-groupe ci-dessus est isomorphe à $D_4$, groupe diédral d'ordre 8.

d) Si $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$ (*i.e.* si $b$ est un carré dans $\mathbb{Q}$), montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Démontrer la réciproque.

e) Si $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{Q}$ (*i.e.* si $\frac{a^2}{b} - 4$ est un carré dans $\mathbb{Q}$), montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Démontrer la réciproque.

f) Donner trois exemples de polynômes $X^4 + aX^2 + b$ de groupe de groupe de Galois $G$ isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $D_4$.

## Exercice 3

Soit $\theta = \sqrt{(2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{3})}$. Soit $K = \mathbb{Q}(\theta)$.

a) Montrer que $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une extension galoisienne de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) En déduire que $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}((2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3}))$.

c) Donner le polynôme minimal de $(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})$ sur $\mathbb{Q}$. *Indication. On pourra d'abord chercher celui sur* $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

d) Montrer que $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \leq \mathbb{Q}(\theta)$.

e) On suppose *par l'absurde* que $\theta \in F$. Soit $\sigma$ l'automorphisme de $F$ qui laisse fixe $\sqrt{2}$ et envoie $\sqrt{3}$ sur $-\sqrt{3}$. Montrer que $(\theta\sigma(\theta))^2 = (2+\sqrt{2})^2\sqrt{6}$. Montrer que $\theta\sigma(\theta) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. En déduire une contradiction.

f) On a donc $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = 8$. Montrer que les racines du polynôme minimal de $\theta$ sur $\mathbb{Q}$ sont $\pm\sqrt{(2\pm\sqrt{2})(3\pm\sqrt{3})}$.

g) Soit $\theta_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}$. Montrer que $\theta\theta_1 \in F$. En déduire que $\theta_1 \in \mathbb{Q}(\theta)$.

h) Montrer de même que les autres conjugués de $\theta$ sont dans $\mathbb{Q}(\theta)$ et en déduire que $\mathbb{Q}(\theta)$ est galoisienne sur $\mathbb{Q}$. On note $G$ son groupe.

i) Soit $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\theta) = \theta_1$. Montrer que $\sigma$ est d'ordre 4 dans $G$.

j) Soit $\tau \in G$ tel que $\tau(\theta) = \sqrt{(2+\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}$. Montrer que $\tau$ est aussi d'ordre 4, que $\sigma, \tau$ engendrent $G$ et que :

$$\sigma^2 = \tau^2,\ \sigma\tau \neq \tau\sigma\ .$$

k) Conclure que $G \simeq Q_8$, groupe des quaternions d'ordre 8.

l) Donner le polynôme minimal de $\theta$ sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ et aussi celui sur $\mathbb{Q}$.

m) Donner les sous-corps de $\mathbb{Q}(\theta)$ et les sous-groupes de $G$ correspondants.