Feuille de TD n° 9

Exercice 1 polynômes irréductibles sur un corps fini

Soit $\mathbb{F}_q$ « le » corps fini de cardinal q. Pour tout d, on note I_d l'ensemble des polynômes irréductibles *unitaires* de degré d sur $\mathbb{F}_q$.

a) Montrer que pour tout $d > 0$, $I_d \neq \emptyset$. *Indication. Considérer* $\mathbb{F}_{q^d}$.

b) Montrer que

$$\prod_{d|n} \prod_{P \in I_d} P = X^{q^n} - X \ .$$

c) En déduire pour tout n, la formule :

$$|I_n| = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d$$

où $\mu(a) = (-1)^l$ si a est produit de l nombre premiers distincts et 0 sinon.

d) En déduire que

$$Z(t) := \frac{1}{1-t} \prod_P \frac{1}{1 - t^{\deg P}} = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}$$

où P décrit les polynômes irréductibles unitaires dans $\mathbb{F}_q[X]$.

Indication. Calculer $\frac{Z'}{Z}$.

Exercice 2 corps des invariants des fractions rationnelles sur $\mathbb{F}_q$

On pose $K = \mathbb{F}_q(X)$. On note G le groupe des automorphismes $\mathbb{F}_q-$linéaires du corps K de la forme :

$$X \mapsto \frac{aX+b}{cX+d}$$

où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$.

a) Montrer que G est d'ordre $q^3 - q$.

b) Montrer que $K^G = \mathbb{F}_q\left(\frac{(X^{q^2}-X)^{q+1}}{(X^q-X)^{q^2+1}}\right)$.

Indication. Poser $y = \frac{(X^{q^2}-X)^{q+1}}{(X^q-X)^{q^2+1}}$, *réduire la fraction, montrer que* $y \in K^G$ *et que* $[K : \mathbb{F}_q(y)] \leq q^3 - q$ ...