# Feuille de TD n° 11

## Exercice 4

a) Soit $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$.
Soit $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Soit $\sigma \in G$ tel que $\sigma$ est $\mathbb{Q}(i)-$linéaire et $\sigma(\sqrt[4]{2}) = i\sqrt[4]{2}$.
Soit $\tau$ la conjugaison complexe.

Alors $G = \langle \sigma, \tau \rangle \simeq D_4$, groupe diédral d'ordre 8.

Voici les sous-groupes de $G$ :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & & & \\
\langle \sigma^2, \sigma\tau \rangle \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & \langle \sigma \rangle \arrow[dr, dash] & \langle \sigma^2, \tau \rangle \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\langle \sigma^3\tau \rangle \arrow[d, dash] & \langle \sigma\tau \rangle \arrow[dl, dash] & \langle \sigma^2 \rangle \arrow[dll, dash] & \langle \sigma^2\tau \rangle \arrow[dlll, dash] & \langle \tau \rangle \arrow[dllll, dash] \\
1 & & & &
\end{tikzcd}$$

et les corps *intermédiaires* correspondants :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & & & \\
\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & \mathbb{Q}(i) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\mathbb{Q}((1-i)\sqrt{2}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}((1+i)\sqrt{2}) \arrow[dl, dash] & \mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) \arrow[dll, dash] & \mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2}) \arrow[dlll, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \arrow[dllll, dash] \\
\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) & & & &
\end{tikzcd}$$

b) Soit $K = \mathbb{Q}(\theta)$ où $\theta = \sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}$. Soit $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Soient $\sigma, \tau \in G$ tels que $\sigma(\theta) = \sqrt{(2-\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}$ et $\tau(\theta) = \sqrt{(2+\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}$.

Alors $G = \langle \sigma, \tau \rangle \simeq Q_8$, groupe des quaternions d'ordre 8 (*cf.* fiche de TD 7).

Voici les sous-groupes de $G$ :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\langle \sigma \rangle \arrow[d, dash] & \langle \tau \rangle \arrow[dl, dash] & \langle \sigma\tau \rangle \arrow[dll, dash] \\
\langle \sigma^2 \rangle = \langle \tau^2 \rangle = \langle (\sigma\tau)^2 \rangle \arrow[d, dash] & & \\
1 & &
\end{tikzcd}$$

et les corps *intermédiaires* correspondants :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dl, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{6}) \arrow[dll, dash] \\
\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \arrow[d, dash] & & \\
1 & &
\end{tikzcd}
$$