

FEUILLE DE TD N° 13
SUR LE THÉORÈME DES ZÉROS DE HILBERT

Exercice 1 un exemple d'anneau non noëthérien

Soit $A = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i \frac{X^i}{i!} : n \in \mathbb{N}, \forall i, a_i \in \mathbb{Z} \right\}$.

- Montrer que l'anneau A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$.
- Montrer que la suite d'idéaux $I_n = (X, \dots, \frac{X^n}{n!})$ est croissante.
- Montrer que si p est premier, alors $I_{p-1} \neq I_p$.
- En déduire que A n'est pas noëthérien.
- Montrer que $I_5 = I_6$.

Exercice 2 nombre minimal arbitraire de générateurs

Montrer que dans $\mathbb{C}[X, Y]$, l'idéal $(X, Y)^n$ peut être engendré par $n + 1$ éléments mais pas moins. *Indication.* Considérer le \mathbb{C} -espace vectoriel $(X, Y)^n / (X, Y)^{n+1}$.

Exercice 3 sous-ensembles algébriques affines

Si $V \subseteq \mathbb{C}^n$, on pose $I(V) = \{f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] : \forall v \in V, f(v) = 0\}$.

- Montrer que $V \subseteq \mathbb{C}^n$ est un sous-ensemble algébrique affine si et seulement si $V = V(I(V))$.
- Soit $E \leq \mathbb{C}^n$ un sous-espace vectoriel. Montrer que E est un sous-ensemble algébrique affine.
- Soit $V = \{(t^2, t^3) : t \in \mathbb{C}\}$. Trouver un élément non nul de l'idéal $I(V)$ et déterminer $I(V)$. Montrer que V est un sous-ensemble algébrique affine de \mathbb{C}^2 . *Indication* montrer que $V = V(I(V))$.

Soit $P(X, Y) = Y^2 - X^3$. Soit $I = (P)$. On a pour tout $t \in \mathbb{C}$, $P(t^2, t^3) = (t^3)^2 - (t^2)^3 = 0$. Donc $P \in I(V)$. Montrons que $(P) = I(V)$. Soit $Q(X, Y) \in I(V)$. On peut faire une division euclidienne de Q par P dans l'anneau $\mathbb{C}[X][Y]$ (car P est unitaire vu comme polynôme en la variable Y à coefficients dans l'anneau $\mathbb{C}[X]$). On a : $Q = P.A(X, Y) + R(X, Y)$ où $R(X, Y) = a(X)Y + b(X)$ pour certains polynômes $a(X), b(X) \in \mathbb{C}[X]$.

On a pour tout $t \in \mathbb{C}$, $0 = Q(t^2, t^3) = P(t^2, t^3)A(t^2, t^3) + a(t^2)t^3 + b(t^2) = 0$.

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{C}, a(t^2)t^3 = -b(t^2).$$

Le terme de gauche est une fonction impaire en t et celui de droite est une fonction paire en t . Donc les deux sont nuls :

$$a(t^2)t^3 = 0 = b(t^2)$$

Donc $a = b = 0$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $Q = P.A(X, Y)$ dans $\mathbb{C}[X, Y]$ i.e. $Q \in (P)$.

Montrons que $V = V(P)$. On a bien sûr $V \subseteq V(P)$. Réciproquement, si $(x, y) \in V(P)$, alors $x^3 = y^2$. Si $x = 0$, on a $y = 0$ donc $(x, y) = (0^2, 0^3) \in V$. Si $x \neq 0$, posons $t = \frac{y}{x}$. On a :

$$\begin{aligned} y = tx &\Rightarrow y^2 = t^2 x^2 = x^3 \Rightarrow t^2 = x \\ &\Rightarrow y = t^3 \end{aligned}$$

donc $(x, y) = (t^2, t^3) \in V$.

- d) Soit $V = \{(t, t^2, t^3) : t \in \mathbb{C}\}$. Montrer que $V = V(Y - X^2, Z - X^3)$. Montrer que $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(Y - X^2, Z - X^3) \simeq \mathbb{C}[T]$. En déduire $I(V)$.
- e) Soit $V = \{(t^3, t^4, t^5) : t \in \mathbb{C}\}$. Montrer que $V = V(Y^2 - XZ, X^2 - YZ, X^2Y - Z^2)$. Montrer que $I(V) = (Y^2 - XZ, X^2 - YZ, X^2Y - Z^2)$.[†]
- f) Montrer que $V = \{(x, xy) : x, y \in \mathbb{C}\}$ n'est pas un sous-ensemble algébrique affine de \mathbb{C}^2 .
- g) Montrer que $V = \{(t, \sin t) : t \in \mathbb{C}\}$ n'est pas un sous-ensemble algébrique de \mathbb{C}^2 . *Indication. Montrer que si $P \in I(V)$, alors $P(X, 0) = 0$.*

Supposons que $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ vérifie $\forall t \in \mathbb{C}, P(t, \sin t) = 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n\pi, 0) = 0$. Donc le polynôme $P(X, 0) \in \mathbb{C}[X]$ s'annule une infinité de fois sur \mathbb{R} . Donc $P(X, 0) = 0$. On a donc $Y|P$ dans $\mathbb{C}[X, Y]$. Si V était un ensemble algébrique, on aurait $V = V(I)$ pour un certain idéal I de $\mathbb{C}[X, Y]$. On aurait alors $\forall P \in I, P \in (Y)$. Donc :

$$I \leq (Y) \Rightarrow V(Y) = \mathbb{C} \times \{0\} \subseteq V(I) = V.$$

Or, $(\frac{\pi}{2}, 1) \in V$ et $(\frac{\pi}{2}, 1) \notin V(Y)$. *Absurde !*

- h) Montrer qu'un sous-ensemble algébrique affine de $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ est soit \mathbb{A}^1 , soit fini, soit vide.

Exercice 4

Soit $I = \langle X^2Y^3, XY^4 \rangle \leq \mathbb{C}[X, Y]$.

- a) Déterminer $V(I)$ et $I(V(I))$.
- b) Déterminer \sqrt{I} .

Exercice 5

Soit $I = (X - Y, (X + Y)^2) \leq \mathbb{C}[X, Y]$

- a) En utilisant le théorème des zéros de Hilbert, montrer que $X \in \sqrt{I}$.

On a $V(I) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = y, (x + y)^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$.

En particulier, le polynôme X s'annule sur $V(I)$. D'après le théorème des zéros de Hilbert :

$$X \in I(V(I) = \sqrt{I}.$$

- b) A-t-on $X \in I$? *Indication. Non.*

Si $X \in I$, on aurait

$$X = A(X, Y).(X - Y) + B(X, Y).(X + Y)^2$$

pour certains polynômes $A, B \in \mathbb{C}[X, Y]$. Mais alors en remplaçant Y par X , on aurait :

$$X = A(X, X).0 + B(X, X).(2X)^2 = 4B(X, X)X^2$$

dans $\mathbb{C}[X]$. *Absurde ! car $X^2 \nmid X$.*

Exercice 6

Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$.

Montrer que $X^2 + Y^2 - 1 | P$ dans $\mathbb{C}[X, Y] \Leftrightarrow$

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(\cos t, \sin t) = 0.$$

[†]. On peut montrer que $I(V)$ ne peut pas être engendré par strictement moins de trois éléments. Cependant V peut être défini par deux équations : $V = V(XZ - Y^2, X^5 - 2X^2YZ + Z^3)$.

Exercice 7 Soit I un idéal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. En utilisant le théorème des zéros de Hilbert, montrer que \sqrt{I} est l'intersection des idéaux maximaux qui contiennent I .

Exercice 8 **une version du théorème des zéros de Hilbert pour les corps non algébriquement clos**

Soit k un corps. Soit $B = k[x_1, \dots, x_n]$ une k -algèbre de type fini qui est un corps. Montrons par récurrence sur n que x_1, \dots, x_n sont algébriques sur k .

- a) Montrer le résultat dans le cas où k est algébriquement clos (en utilisant le théorème des zéros de Hilbert).
- b) Montrer le cas $n = 1$.
- c) On suppose que le résultat est vrai pour $n - 1$, $n \geq 1$. En particulier x_2, \dots, x_n sont algébriques sur $k(x_1)$. Montrer qu'il existe $0 \neq f \in k[x_1]$ tel que x_2, \dots, x_n sont entiers sur $k[x_1]_f = \left\{ \frac{a}{f^N} : N \geq 0, a \in k[x_1] \right\}^\dagger$.
- d) En déduire que $k[x_1]_f$ est un corps.
- e) En déduire que x_1 est algébrique sur k et conclure!
- f) En déduire qu'une \mathbb{Z} -algèbre de type fini qui est un corps est un corps fini.

\dagger . on dit que x est entier sur un anneau A s'il existe un polynôme unitaire dans $A[X]$ qui annule x .