Théorème de Bézout (début avec le résultant)

a)

b) Soient $P(X,Y)=a_0(X)Y^p+\cdots+a_p(X)$ et $Q(X,Y)=b_0(X)Y^q+\cdots+b_q(X)\ \epsilon\mathbb{C}[X,Y]$

où a_i et b_i sont de degré $\leqslant i$.

On pose $\tilde{a_i}(X,Z)=Z^i a_i\left(\frac{X}{Z}\right)$ et $\tilde{b_i}(X,Z)=Z^i b_i\left(\frac{X}{Z}\right)\epsilon\mathbb{C}[X,Z]_i$ (homogènes de degré i). On pose aussi :

$\tilde{P}(X,Y,Z)=Z^pP\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right), \tilde{Q}(X,Y,Z)=Z^qQ\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)\epsilon\mathbb{C}[X,Y,Z]$ homogènes de degrés p et q.

Si on considère P,Q comme des polynômes en la variable Y à coefficients dans $\mathbb{C}[X]$, on pose $R(X)=R\text{és}_{p,q}(P,Q)\epsilon\mathbb{C}[X]$.

Considérant $\tilde{P},\tilde{Q}$ comme des polynômes en la variable Y à coefficients dans $\mathbb{C}[X,Z]$, on pose :

$R(X,Z)=R\text{és}_{p,q}(\tilde{P},\tilde{Q})\epsilon\mathbb{C}[X,Z]$.

$$\text{On a : }\forall t\epsilon\mathbb{C}, R(tX,tZ)=\begin{vmatrix} \tilde{a_0}(tX,tZ) & \tilde{a_1}(tX,tZ) & \dots & \tilde{a_p}(tX,tZ) & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{a_0}(tX,tZ) & \dots & & & \\ & & \dots & & & \\ \tilde{b_0}(tX,tZ) & \tilde{b_1}(tX,tZ) & \dots & \dots & \tilde{b_q}(tX,tZ) & \dots \\ & \dots & \dots & & & \dots \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \tilde{a_0}(X,Z) & t\widetilde{a_1}(X,Z) & \dots & t^p\tilde{a_p}(X,Z) & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{a_0}(X,Z) & \dots & & \dots & \\ & & \dots & & & \\ \tilde{b_0}(tX,Z) & t\tilde{b_1}(X,Z) & \dots & \dots & t^q\tilde{b_q}(X,Z) & \dots \\ & \dots & \dots & & & \dots \end{vmatrix}$$

Si on multiplie la $i-$ème ligne par t^{i-1}, $1\leqslant i\leqslant q$ et la $n+i-$ème ligne par t^{i-1}, $1\leqslant i\leqslant p$.

On trouve : $t^{0+1+\cdots+q-1+0+1+\cdots+p-1}R(tX,tZ)=t^{\frac{q(q-1)}{2}+\frac{p(p-1)}{2}}R(tX,tZ)$

$$=\underbrace{\begin{vmatrix} \tilde{a_0}(X,Z) & t\widetilde{a_1}(X,Z) & \dots & t^p\tilde{a_p}(X,Z) & 0 & \dots \\ 0 & t\widetilde{a_0}(X,Z) & \dots & t^p\widetilde{a_{p-1}}(X,Z) & \dots & \\ & & \dots & & & \\ \tilde{b_0}(tX,Z) & t\tilde{b_1}(X,Z) & \dots & \dots & t^q\tilde{b_q}(X,Z) & \dots \\ & \dots & \dots & & & \dots \end{vmatrix}}_{\text{la colonne } k \text{ est multipliée par } t^k}=t^{1+2+\cdots+p+\cdots+p+q-1}R(X,Z)$$

Donc $R(tX,tZ)=t^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}-\frac{q(q-1)}{2}-\frac{p(p-1)}{2}}R(X,Z)=t^{pq}R(X,Z)$.

Donc R est homogène de degré pq. Comme $R(X)=R(X,1)$, on a $R(X)$ de degré $\leqslant pq$ $\square$