Feuille 4

Sur le résultant et le discriminant

Définition. Si $P=a_0X^p+a_1X^{p-1}+\cdots+a_p,\ Q=b_0X^q+b_1X^{q-1}+\cdots+b_q\ \epsilon A[X]$,

on pose $R\acute{e}s_{p,q}(P,Q)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_p & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_p & 0 & \dots\\ \\ & & & a_0 & \dots & a_p & \dots\\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_q & 0 & \dots\\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_q & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}\epsilon A.$

Exercice 1.

a) $R\acute{e}s_{p,0}(P,a)=\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & & & \\ 0 & a & \dots & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & a\end{vmatrix}=a^p.$

b) $R\acute{e}s_{1,p}(X-a,P)=\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & & & \\ 0 & 1 & -a & 0 & \dots & & \\ & & \dots & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & & 1 & -a\\ a_0 & a_1 & & & & & a_p\end{vmatrix}$

On ne change pas le déterminant en faisant les opérations suivantes sur les colonnes :

$C_2\leftarrow C_2+aC_1,\ C_3\leftarrow C_3+aC_2,\dots,C_{p+1}\leftarrow C_{p+1}+aC_p$

On obtient (après ces opérations) un déterminant de la forme :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \\ & & \dots & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & 1 & 0\\ a_0 & a_1+a_0a & * & \dots & * & \underbrace{a_p+a_{p-1}a+\cdots+a_0a^p}_{P(a)}\end{vmatrix}=P(a).$$

c) On change le signe du déterminant $R\acute{e}s_{p,q}(P,Q)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_p & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_p & 0 & \dots\\ \\ & & & a_0 & \dots & a_p & \dots\\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_q & 0 & \dots\\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_q & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}$

lorsqu'on échange 2 lignes entre elles.

Si on échange la ligne $p+1$ avec la ligne p puis la ligne p avec la ligne $p-1$, …, etc puis la ligne 2 avec la ligne 1, on a multiplié le déterminant par $(-1)^p$ et on a déplacé la ligne $p+1$ en ligne 1. On fait les mêmes opérations pour amener la ligne $p+2$ en position 2 puis toutes les lignes jusquà la ligne $p+q$.

On retrouve alors $R\acute{e}s_{q,p}(Q,P)$. Donc $R\acute{e}s_{p,q}(P,Q)=(-1)^{\overbrace{p+\cdots+p}^{q\,\text{fois}}}R\acute{e}s_{q,p}(Q,P)$

$=(-1)^{pq}R\acute{e}s_{q,p}(Q,P)$.

d) On pose $S_{p,q}(P,Q) = {}^t\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_p & 0 & \dots \\ & & & & & & \\ & & & a_0 & \dots & a_p & \dots \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_q & 0 & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_q & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \epsilon \mathcal{M}_{p+q}(A)$.

C'est la matrice de l'application linéaire :

$A[X]_{<q} \oplus A[X]_{<p} \to A[X]_{<p+q}$ dans les bases

$(X^{q-1} \oplus 0, \dots, 1 \oplus 0, 0 \oplus X^{p-1}, \dots, 0 \oplus 1)$ pour l'espace de départ et

$(X^{p+q-1}, \dots, 1)$ pour l'espace d'arrivée.

Alors $R\acute{e}s_{p,q}(P,Q) = d\acute{e}t(S_{p,q}(P,Q))$.

e) Supposons P, Q, R unitaires. Alors $A[X]_{<p+q} = A[X]_{<p} \oplus PA[X]_{<q\ (\text{par division eucidienne par } P)}$.

De même, on a : $A[X]_{<q+r} = A[X]_{<r} \oplus RA[X]_{<q}$ et $A[X]_{<p+q+r} = A[X]_{<p+r} \oplus PRA[X]_{<q}$.

On considère les applications $A-$linéaires suivantes :

s_3: $A[X]_{<r} \oplus A[X]_{<p+q} \to A[X]_{<p+q+r}, A \oplus B \mapsto APQ + BR$;

s_1: $A[X]_{<r} \oplus \underbrace{A[X]_{<p} \oplus PA[X]_{<q}}_{=A[X]_{<p+q}} \to A[X]_{<q+r} \oplus A[X]_{<p}, A \oplus (B_1 \oplus PB_2) \mapsto (AQ + RB_2) \oplus B_2$;

$s_2 : A[X]_{<p} \oplus A[X]_{<q+r} \to A[X]_{<p+q+r}$, $U \oplus V \mapsto UR + VP$.

On vérifie que $s_3 = s_2 \circ s_1$.

Or, voici les matrices de ces applications linéaires dans les bases indiquées : $S_1 = [s_1]_{\underbrace{((X^{q+r-1}, \dots, 1), (X^{p-1}, \dots, 1))}_{\mathfrak{B}_1}; \underbrace{(X^{r-1}, \dots, 1, PX^{q-1}, \dots, P, X^{p-1}, \dots, 1)}_{\mathfrak{B}_2}} = \left(\begin{array}{c|c} {}^tS_{q,r}(Q,R) & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{array}\right)$,

$S_2 = [s_2]_{\underbrace{(X^{p+r-1}, \dots, 1, PRX^{q-1}, \dots, PR)}_{\mathfrak{B}_3}; \underbrace{(X^{p-1}, \dots, 1, X^{r-1}, \dots, 1, RX^{q-1}, \dots, R)}_{\mathfrak{B}_4}} = \left(\begin{array}{c|c} {}^tS_{r,p}(R,P) & 0 \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$,

$S_3 = [s_3]_{\underbrace{(X^{p+q+r-1}, \dots, 1)}_{\mathfrak{B}_5}; \underbrace{(X^{r-1}, \dots, 1, X^{p+q-1}, \dots, 1)}_{\mathfrak{B}_6}} = (\ {}^tS_{p+q,r}(PQ,R)\ )$

En utilisant les formules de changement de bases, on a donc l'égalité suivante dans $\mathcal{M}_{p+q+r,p+q+r}(A)$:

$S_3 = [s_2]_{\mathfrak{B}_5, \mathfrak{B}_4} [s_1]_{\mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}_6} = [\mathrm{Id}]_{\mathfrak{B}_5, \mathfrak{B}_3} [s_2]_{\mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4} [\mathrm{Id}]_{\mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}_1} [s_1]_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2} [\mathrm{Id}]_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_6}$

$= [\mathrm{Id}]_{\mathfrak{B}_5, \mathfrak{B}_3} S_2 ([\mathrm{Id}]_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_4})^{-1} S_1 ([\mathrm{Id}]_{\mathfrak{B}_6, \mathfrak{B}_2})^{-1}$.

Or, $[\mathrm{Id}]_{\mathfrak{B}_5, \mathfrak{B}_3} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_q \\ \hline I_{p+r} & * \end{array}\right)$, $[\mathrm{Id}]_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_4} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_q \\ \hline I_r & * \end{array}\right) \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right)$, $[\mathrm{Id}]_{\mathfrak{B}_6, \mathfrak{B}_2} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \\ \hline & \left(\begin{array}{c|c} I_q & \\ \hline * & I_p \end{array}\right) \end{array}\right)$.

D'où : $d\acute{e}t\, S_3 = (-1)^{(p+r)q} d\acute{e}t\, S_2 (-1)^{pr + (p+r)q} \mathrm{d\acute{e}tS}_1$.

Or $d\acute{e}t\, S_3 = R\acute{e}s_{p+q,r}(PQ,R)$, $d\acute{e}t\, S_2 = R\acute{e}s_{r,p}(R,P) = (-1)^{pr} R\acute{e}s_{p,r}(P,R)$, $d\acute{e}t\, S_1 = R\acute{e}s_{q,r}(Q,R)$.

Donc : $R\acute{e}s_{p+q,r}(PQ,R) = R\acute{e}s_{p,r}(P,R) R\acute{e}s_{q,r}(Q,R)$.

Dans le cas où l'anneau A est intègre, si $P = aP_1$, $Q = bQ_1$, $R = cR_1$ avec $a, b, c \epsilon A$, P_1, Q_1, R_1 unitaires, on trouve :

$R\acute{e}s_{p+q,r}(PQ,R) = R\acute{e}s_{p+q,r}(abP_1 Q_1, cR_1) = (ab)^r c^{p+q} R\acute{e}s_{p+q,r}(P_1 Q_1, R_1)$

$= a^r c^p R\acute{e}s_{p,r}(P_1, R_1) b^r c^q R\acute{e}s_{q,r}(Q_1, R_1) = R\acute{e}s_{p,r}(P,R) R\acute{e}s_{q,r}(Q,R) \square$

On en déduit par récurrence la formule du cours :

$R\acute{e}s_{p,q}(a_0(X - Y_1) \dots (X - Y_p), b_0(X - Z_1) \dots (X - Z_q)) = a_0^q b_0^p \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} (Y_i - Z_j)$.