Feuille de TD n° 10

Exercice 1 Théorème de Galois sur les extensions résolubles par radicaux

Théorème. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible de degré p premier. Alors sont équivalentes :

(i) pour toutes racines $x_1 \neq x_2$ de P, $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$ est le corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ de P ;

(ii) il existe x_1, x_2 racines de P telles que $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$ est le corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ de P ;

(iii) P est résoluble par radicaux.

Démonstration.

a) On note Aff_p l'ensemble des bijections de $\mathbb{F}_p$ de la forme $x \mapsto ax + b$, $a \in \mathbb{F}_p^\times$, $b \in \mathbb{F}_p$. Montrer que si $\sigma \in Aff_p$ a au moins deux points fixes, alors $\sigma = \mathrm{Id}$.

b) Soit $c = (12...p) \in \mathfrak{S}_p$. Montrer que $N(\langle c \rangle) = Aff_p$.

c) Montrer que si $H \leq \mathfrak{S}_p$ est transitif et résoluble, alors

$$^\exists \sigma \in \mathfrak{S}_p,\ \sigma H \sigma^{-1} \leq Aff_p \ .$$

d) Terminer la démonstration.

e) Vérifier le théorème pour le polynôme $X^5 - 2$.

f) Montrer que le polynôme $X^5 - 4X + 2$ n'est pas résoluble par radicaux sur $\mathbb{Q}$. *Indication.* Quel est son groupe de Galois ?

Exercice 2 Réalisation du groupe symétrique $\mathfrak{A}_4$ sur le corps $\mathbb{C}(t)$

Soit G le sous-groupe des automorphismes du corps $\mathbb{C}(t)$ engendré par les « changements de variable » $\sigma : t \mapsto \frac{t-i}{t+i}$ et $\tau : t \mapsto -t$.

a) Vérifier que σ est d'ordre 3 et τ d'ordre 2. Vérifier aussi la relation :

$$\sigma\tau\sigma\tau = \tau\sigma^2 \ .$$

b) Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$. *Indication.* Par exemple poser $f_1 = z + {}^\sigma z + {}^{\sigma^2} z$ et considérer l'action de G sur l'ensemble

$$f_1,\ f_2 = {}^\tau f_1,\ f_3 = {}^{\sigma\tau} f_1,\ f_4 = {}^{\tau\sigma\tau} f_1 \ .$$

c) Montrer que la fraction

$$f = \left(\frac{t^4 - 2i\sqrt{3}t^2 + 1}{t^4 + 2i\sqrt{3}t^2 + 1} \right)^3$$

est dans $\mathbb{C}(t)^G$.

d) Montrer que t est algébrique sur $\mathbb{C}(f)$ de degré ≤ 12.

e) En considérant les racines du polynôme minimal de t sur le corps $\mathbb{C}(t)^G$, montrer que $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(t)^G] = 12$.

f) En déduire que $\mathbb{C}(t)^G = \mathbb{C}(f)$.