Feuille de TD n° 11

Exercice. Réalisation du groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ sur le corps $\mathbb{C}(t)$

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

On pose $t = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -(\omega - \omega^{-1}) & \omega^2 - \omega^{-2} \\ \omega^2 - \omega^{-2} & \omega - \omega^{-1} \end{pmatrix}$.

On pose $G = \langle s, t \rangle$, sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

On pose

$$^\forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\ ^\forall F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y],$$

$$g^{-1}.F(x,y) = F(ax+by, cx+dy) \ .$$

a) On pose

$$F(x,y) = xy \prod_{j=0}^{4} (x - \omega^j(\omega + \omega^{-1})y)(\prod_{j=0}^{4} (x - \omega^j(\omega^2 + \omega^{-2})y) \in \mathbb{C}[x,y] \ .$$

Montrer que F est $G-$invariante et calculer F.

b) En déduire que

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{vmatrix}$$

est aussi un polynôme $G-$invariant. Calculer H.

c) On note Γ l'image de G dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Déduire de ce qui précède que la fraction rationnelle :

$$f(t) = \frac{F^5(t,1)}{H^3(t,1)}$$

est $\Gamma-$invariante.

d) En déduire que Γ est d'ordre 60 (et que G est d'ordre 120).

e) Montrer que $\mathbb{C}(t)^\Gamma = \mathbb{C}(f)$.

f) Vérifier que $\Gamma \simeq \mathfrak{A}_5$.