Feuille de TD n° 13
sur le théorème des zéros de Hilbert

Exercice 1 Un exemple de sous-anneau non nœthérien de $\mathbb{Q}[X]$

Soit $A = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{X^i}{i!} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \forall i, \ a_i \in \mathbb{Z}\right\}$.

a) Montrer que l'anneau A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$.

b) Montrer que la suite d'idéaux $I_n = \left(X, ..., \frac{X^n}{n!}\right)$ est croissante.

c) Montrer que si p est premier, alors $I_{p-1} \neq I_p$.

d) En déduire que A n'est pas nœthérien.

e) Montrer que $I_5 = I_6$.

Exercice 2 Nombre minimal arbitraire de générateurs

Montrer que dans $\mathbb{C}[X, Y]$, l'idéal $(X, Y)^n$ peut être engendré par $n+1$ éléments mais pas moins. *Indication. Considérer le* $\mathbb{C}-$*espace vectoriel* $(X, Y)^n/(X, Y)^{n+1}$.

Exercice 3 Sous-ensembles algébriques affines

Si $V \subseteq \mathbb{C}^n$, on pose $I(V) = \{f \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \ : \ \forall v \in V, \ f(v) = 0\}$.

a) Montrer que $V \subseteq \mathbb{C}^n$ est un sous-ensemble algébrique affine si et seulement si $V = V(I(V))$.

b) Soit $V \subseteq \mathbb{C}^n$ un sous-ensemble fini. Montrer que V est un sous-ensemble algébrique affine et que dans ce cas $|V| = \dim \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/I(V)$.

c) Soit $V \leq \mathbb{C}^n$ un sous-espace vectoriel. Montrer que V est un sous-ensemble algébrique affine.

d) Soit $V = \{(t^2, t^3) \ : \ t \in \mathbb{C}\}$. Trouver un élément non nul de l'idéal $I(V)$ et déterminer $I(V)$. Montrer que V est un sous-ensemble algébrique affine de $\mathbb{C}^2$. *Indication montrer que* $V = V(I(V))$.

e) Soit $V = \{(t, t^2, t^3) : t \in \mathbb{C}\}$. Montrer que $V = V(Y - X^2, Z - X^3)$. Montrer que $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(Y - X^2, Z - X^3) \simeq \mathbb{C}[T]$. En déduire $I(V)$.

f) Soit $V = \{(t^3, t^4, t^5) \ : \ t \in \mathbb{C}\}$. Montrer que $V = V(Y^2 - XZ, X^3 - YZ, X^2Y - Z^2)$. Montrer que $I(V) = (Y^2 - XZ, X^3 - YZ, X^2Y - Z^2)$. *Indication. Poser* $I = (Y^2 - XZ, X^3 - YZ, X^2Y - Z^2)$ *et remarquer que* $\mathbb{C}[X, Y, Z] = \mathbb{C}[X] + \mathbb{C}[X]Y + \mathbb{C}[X]Z + I$ *et en déduire que* $\mathbb{C}[X, Y, Z]/I \simeq \mathbb{C}[T^3, T^4, T^5]$ *et que* I *est premier*†.

g) Déterminer l'idéal $I(V)$ pour

$$V = \{(x, xy) \ : \ x, y \in \mathbb{C}\}, \ V = \{(t, e^t) \ : \ t \in \mathbb{C}\}, \ V = \{(\cos t, \sin t) \ : \ t \in \mathbb{C}\}$$

et en déduire dans chaque cas si V est un sous-ensemble algébrique affine.

h) Montrer qu'un sous-ensemble algébrique affine de $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ est soit $\mathbb{A}^1$, soit fini, soit vide.

Exercice 4

Soit $I = \langle X^2Y^3, XY^4 \rangle \leq \mathbb{C}[X, Y]$.

a) Déterminer $V(I)$ et $I(V(I))$.

†. On peut montrer que $I(V)$ ne peut pas être engendré par strictement moins de trois éléments. Cependant V peut être défini par deux équations : $V = V(XZ - Y^2, X^5 - 2X^2YZ + Z^3)$.

b) Déterminer $\sqrt{I}$.

Exercice 5 Soit $I = (X - Y, (X + Y)^2) \leq \mathbb{C}[X, Y]$

a) En utilisant le théorème des zéros de Hilbert, montrer que $X \in \sqrt{I}$.

b) A-t-on $X \in I$? *Indication. Non.*

Exercice 6 Soit I un idéal de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. En utilisant le théorème des zéros de Hilbert, montrer que $\sqrt{I}$ est l'intersection des idéaux maximaux qui contiennent I.

Exercice 7 Une version du théorème des zéros de Hilbert pour les corps non algébriquement clos

Soit k un corps. Soit

$$(H_n) \text{ Si } B = k[x_1, ..., x_n] \text{ est une } k-\text{algèbre de type fini qui est un corps,}$$

$$\text{alors } B \text{ est algébrique sur } k\ .$$

a) Montrer (H_1).

b) On suppose que (H_{n-1}) est vraie, $n \geq 1$. Montrer que B est un $k(x_1)-$espace vectoriel de dimension finie.

c) Soit $(e_1, ..., e_N)$ une base de B comme $k(x_1)-$espace vectoriel.
On supposera que $e_1 = 1$.
On pose a_{pk}, $a_{ijk} \in k(x_1)$ tels que :

$$\forall p, i, j,\ x_p = \sum_k a_{pk} e_k,\ e_i e_j = \sum_k a_{ijk} e_k\ .$$

Vérifier que

$$B = Ae_1 + ... + Ae_N$$

où $A = k[a_{pk}, a_{ijk}\ :\ p, i, j, k]$.

d) En déduire que $k(x_1) \leq A$. En utilisant que A est une $k-$algèbre de type fini, montrer que x_1 est algébrique sur k.

e) Montrer (H_n).

f) Montrer qu'une $\mathbb{Z}-$algèbre de type fini qui est un corps est un corps fini.
Indication. Si $B = \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$ est un corps de caractéristique nulle alors B est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel de dimension finie d'après (H_n). Soit $0 \neq f \in \mathbb{Z}$ tel que $x_1, ..., x_n$ sont entiers sur $\mathbb{Z}_f$ †, montrer que B est un $\mathbb{Z}_f-$module de type fini et conclure comme dans le cas précédent.

†. On dit qu'un élément b est entier sur l'anneau A s'il est annulé par un polynôme unitaire de $A[X]$.