FEUILLE DE TD N$^{\text{o}}$ 1

**Exercice 1 Exemples de corps**

a) Vérifier que les anneaux suivants sont des corps :

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}],\ \mathbb{Z}[j]/(2),\ \mathbb{Z}[\sqrt{2}]/(3)\ .$$

†

b) Montrer que $\overline{1}+\overline{\sqrt{2}}$ est d'ordre 8 dans le groupe $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/(3))^*$.

**Exercice 2 Automorphismes de corps**

a) Montrer que si $\sigma$ est un automorphisme du corps $\mathbb{R}$, alors

$$^\forall x > 0,\ \sigma(x) > 0\ .$$

En déduire que $\mathrm{Aut}\mathbb{R} = \{\mathrm{Id}\}$.

b) Déterminer le groupe $\mathrm{Aut}\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

c) Soit $x_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Trouver un polynôme unitaire rationnel $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 4 qui annule $x_1$.

d) On note $x_1, x_2, x_3, x_4$ les racines de $P$ et on pose $K = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_,x_4)$. Exprimer les $x_i$ et vérifier que $\mathbb{Q}(x_1) = K$.

e) Vérifier que le groupe $\mathrm{Aut}K$ est d'ordre $\leq 4$.

f) Justifier l'existence d'un automorphisme $\theta$ de $\mathbb{Q}(x_1)$ tel que

$$\theta(x_1) = \sqrt{2-\sqrt{2}}\ .$$

g) Vérifier que $\mathrm{Aut}K$ est cyclique d'ordre 4 engendré par $\theta$.

**Exercice 3 Une équation de degré 2**

En utilisant l'égalité :

$$2\cos(2x) = (2\cos x)^2 - 2\,,$$

montrer que

$$2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ .$$

**Exercice 4 Méthode de Cardan pour les équations de degré 3**

Soient $p, q \in \mathbb{C}$. Soit

$$P(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]\ .$$

†. Où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Vérifier que si $u, v$ vérifient :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} u^3 + v^3 & = & -q \\ uv & = & -\frac{p}{3} \end{array} \right.$$

alors $x = u + v$ est racine du polynôme $P$.

b) Soient $u, v$ des racines cubiques :

$$u := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

telles que $uv = -\frac{p}{3}$.
Justifier que c'est possible et déduire de la question précédente que les racines de $P$ sont :

$$u + v,\ ju + j^2 v,\ j^2 u + jv\ .$$

c) **Applications.**
En déduire les formules suivantes :

$$2\cos\frac{2\pi}{9} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$2\cos\frac{2\pi}{7} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{7+21i\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{7-21i\sqrt{3}}{2}}\right)$$

*Indication. Utiliser la formule*

$$2\cos(3x) = (2\cos x)^3 - 3.(2\cos x)\ .$$

**Exercice 5 Méthode d'Euler pour les équations de degré 4**
Soient $p, q, r \in \mathbb{C}$. Soit

$$P(X) = X^4 + pX^2 + qX + r \in \mathbb{C}[X]\ .$$

a) Vérifier que si $u, v, w$ vérifient :

$$(*) \begin{cases} u + v + w = -p/2 \\ \sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w} = -q/8 \\ -(u+v+w)^2 + 4(uv + uw + vw) = -r \end{cases}$$

alors $x = \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}$ est racine du polynôme $P$.

b) En déduire que si $u, v, w$ sont les trois racines du polynôme :

$$T^3 + \frac{p}{2}T^2 + (\frac{(p/2)^2 - r}{4})T - \left(\frac{q}{8}\right)^2$$

et si on choisit des racines carrées telles que

$$\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w} = -q/8$$

*(justifier que c'est possible)*, alors les racines du polynôme $P$ sont :

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}\,,\ \sqrt{u} - \sqrt{v} - \sqrt{w}\,,\ -\sqrt{u} + \sqrt{v} - \sqrt{w}\,,\ -\sqrt{u} - \sqrt{v} + \sqrt{w}\ .$$

c) **Application.** *Seulement pour les calculateurs motivés :* trouver les racines du polynôme

$$X^4 - X - 1\ .$$