Feuille de TD n° 3

Exercice 1 $\cos \frac{2\pi}{11}$

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $z = e^{\frac{2i\pi}{11}}$.

a) Montrer que

$$\omega + \omega^{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

et en déduire que

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} \ .$$

b) Montrer que si p est premier alors le polynôme

$$\Phi_p(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + ... + X + 1$$

est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

c) En déduire les degrés $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}]$ *et* $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}]$.

d) Montrer que 2 est générateur dans le groupe $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}^{\times}$.

e) Justifier l'existence de φ, automorphisme de $\mathbb{Q}(z)$ tel que $\varphi(z) = z^2$. Quel est l'ordre de φ dans le groupe $\mathrm{Aut}\mathbb{Q}(z)$?

f) Montrer que

$$\mathbb{Q}(z) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(z + z^{-1}) = \mathbb{Q}(2\cos\frac{2\pi}{11})$$

et en déduire que $x_0 = 2\cos\frac{2\pi}{11}$ est de degré 5 sur $\mathbb{Q}$.

g) Montrer que le polynôme minimal de x_0 sur $\mathbb{Q}$ est le polynôme

$$P(X) = X^5 + X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 3X + 1$$

h) En utilisant la multiplicativité des degrés, montrer que

$$[\mathbb{Q}(x_0, \omega) : \mathbb{Q}] = 20$$

et que le polynôme P est aussi irréductible sur $\mathbb{Q}(\omega)$.

i) On pose

$$\forall 0 \leq k \leq 4,\ x_k = z^{2^k} + z^{-2^k} \ .$$

Vérifier que

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$$

sont les racines de P et que :

$$\mathbb{Q}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathbb{Q}x_0 + \mathbb{Q}x_1 + \mathbb{Q}x_2 + \mathbb{Q}x_3 + \mathbb{Q}x_4 = \mathbb{Q}(x_0) \ .$$

j) Justifier qu'il existe un automorphisme θ du corps $K = \mathbb{Q}(x_0, \omega)$ tel que $\theta(x_0) = x_1$.

k) Calculer $\theta(x_k)$ pour tout k.
Indication. On a $\theta\Big|_{\mathbb{Q}(z+z^{-1})} = \varphi\Big|_{\mathbb{Q}(z+z^{-1})}$.

l) Montrer que $K^\theta = \mathbb{Q}(\omega)$. *Indication. On a :* $K = \mathbb{Q}(\omega)x_0 \oplus ... \oplus \mathbb{Q}(\omega)x_4$.

m) On pose

$$\forall i,\ V_i = x_0 + \omega^i x_1 + ... + \omega^{4i} x_4 \ .$$

Montrer que

$$\forall i,\ \theta(V_i) = \omega^{-i} V_i$$

et en déduire que

$$V_1^5, ..., V_4^5 \in \mathbb{Q}(\omega) \ .$$

n) En déduire la formule :

$$2\cos\frac{2\pi}{11} = \frac{1}{5}\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)$$

où

$$V_1 = \sqrt[5]{\frac{11}{4}\left(89 + 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5+\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right)}$$

$$V_2 = \sqrt[5]{\frac{11}{4}\left(89 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5+\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right)}$$

$$V_3 = \sqrt[5]{\frac{11}{4}\left(89 - 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5+\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right)}$$

$$V_4 = \sqrt[5]{\frac{11}{4}\left(89 - 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5+\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right)}$$

(Vandermonde, 1771)

Exercice 2 Irréductibilité de $X^p - a$

Soit K un corps. Soit p un nombre premier. Soit $a \in K$, montrer :

$$X^p - a \text{ est irréductible sur } K \Leftrightarrow X^p - a \text{ n'a pas de racine dans } K.$$

Indication. Noter $a_1, ..., a_d$ les racines d'un facteur irréductible de $X^p - a$ et considérer $(a_1 ... a_d)^p \in K^p$. †

†. En déduire que si p est un nombre premier impair et si $X^p - a$ n'a pas de racine dans K alors

$$\forall r \geq 1,\ X^{p^r} - a \text{ irréductible sur } K \ .$$

Exercice 3 cos $\left(\frac{2\pi}{17}\right)$
Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{17}}$. On note $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta))$ et θ l'automorphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\zeta) &\longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta) \\ \zeta &\longmapsto \zeta^3 . \end{aligned}$$

Si $H \leq G$ est un sous-groupe, on posera

$$\zeta_H = \sum_{h \in H} h(\zeta) \ .$$

On notera H_d l'unique sous-groupe de G d'ordre d si $d|16$.

a) Déterminer le polynôme minimal de ζ sur $\mathbb{Q}$. En déduire que θ est bien défini et que c'est un automorphisme.

b) Montrer que $G = \langle \theta \rangle$ et que

$$\forall d|16,\ H_d = \langle \theta^{\frac{16}{d}} \rangle \ .$$

c) Exprimer ζ_{H_8} et $\theta(\zeta_{H_8})$. *Indication :* $(X - \zeta_{H_8})(X - \theta(\zeta_{H_8})) = X^2 + X - 4$.

d) Exprimer ζ_{H_4} et $\theta^2(\zeta_{H_4})$. *Indication :* $(X - \zeta_{H_4})(X - \theta^2(\zeta_{H_4})) = X^2 - \theta(\zeta_{H_8})X + 1$. En déduire $\theta(\zeta_{H_4})$.

e) Exprimer ζ_{H_2} et $\theta^4(\zeta_{H_2})$. *Indication :* $(X - \zeta_{H_2})(X - \theta^4(\zeta_{H_2})) = X^2 - \zeta_{H_4}X + \theta(\zeta_{H_4})$.

f) Montrer que $2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) =$

$$-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{4}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

(Gauss).

Exercice 4 Le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ Montrer que l'ensemble $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui est algébriquement clos.