Feuille de TD n° 4

Exercice 1 Soit $P(X) = a_0(X - x_1)(X - x_2)...(X - x_n)$ un polynôme de degré $n \geq 1$.

On pose
$$\Delta(P) = a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 \ .$$

a) Montrer que si $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n$, alors
$$\Delta_P \in \mathbb{Z}[a_0, a_1, ..., a_n] \ .$$

b) Calculer Δ_P si P est de degré 2 *(en fonction des coefficients de P)*.

c) Si P est de degré 3, montrer que
$$\Delta_P = a_1^2a_2^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_0^2a_3^2 + 18a_0a_1a_2a_3 \ .$$

Indications. Montrer que $\Delta = a\sigma_1^6 + b\sigma_1^4\sigma^2 + c\sigma_1^3\sigma_3 + d\sigma_1^2 + e\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + f\sigma_2^3 + g\sigma_3^2$; puis en prenant $x_3 = 0$, montrer que $a = b = 0$ et trouver d, f. Puis traiter le cas où $\sigma_2 = 0$, etc

d) *Lien avec le résultant.* Montrer que
$$\text{Rés}_{n,n-1}(P, P') = a_0(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta_P = \text{Rés}_{n-1,n}(P', P) \ .$$

En déduire que $\Delta_P = (na_0)^n \prod_{i=1}^{n-1} P(y_i)$ où $y_1, ..., y_{n-1}$ sont les racines de P'.

e) Calculer le discriminant de $X^n - 1$ et celui de $\frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + ... + 1$.

f) Montrer que si P, Q sont respectivement de degrés p, q, alors
$$\Delta_{PQ} = \text{Rés}_{p,q}^2(P, Q)\Delta_P\Delta_Q \ .$$

Quelques utilisations du résultant

Exercice 2 Intersection de courbes

Soient $0 \neq F, G \in \mathbb{C}[X, Y]$. On pose :
$$\mathcal{C}_F := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \ : \ F(x, y) = 0\}, \ \mathcal{C}_G := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \ : \ G(x, y) = 0\} \ .$$

a) Montrer que si $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_F \cap \mathcal{C}_G$, alors x_0 est une racine du polynôme $\text{Rés}_{F,G}(X)$ où F, G sont vus dans $\mathbb{C}[X][Y]$ et y_0 est une racine du polynôme $\text{Rés}_{F,G}(Y)$ où F, G sont vus dans $\mathbb{C}[Y][X]$.

b) En déduire les points d'intersection des courbes d'équations :

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y^2 = x^3 - x^2 - x + 1 \ .$$

Exercice 3 Implicitation

Soit

$$\mathcal{C} \,:\, x = \frac{p(t)}{q(t)},\ y = \frac{r(t)}{s(t)}$$

une courbe paramétrée où $p, q, r, s \in \mathbb{C}[T]$.

a) On pose

$$F(t) = Xq(t) - p(t),\ G(t) = Ys(t) - r(t) \ \in \mathbb{C}[X,Y][t] \ .$$

Montrer que $\mathcal{C}$ est contenue dans la courbe d'équation

$$\text{Rés}_{F,G}(x,y) = 0 \ .$$

b) *Application.* Trouver l'équation correspondant à la paramétrisation :

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ y = \frac{2t}{t^2+1} \ .$$

Exercice 4 Nombres algébriques

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$. On note f et g les polynômes minimaux de α et β.

a) Montrer que le polynôme

$$\text{Rés}_{f(X-Y),g(Y)}(X)$$

(où $f(X-Y)$ et $g(Y)$ sont vus dans $\mathbb{Q}[X][Y]$) est un polynôme annulateur de $\alpha + \beta$.

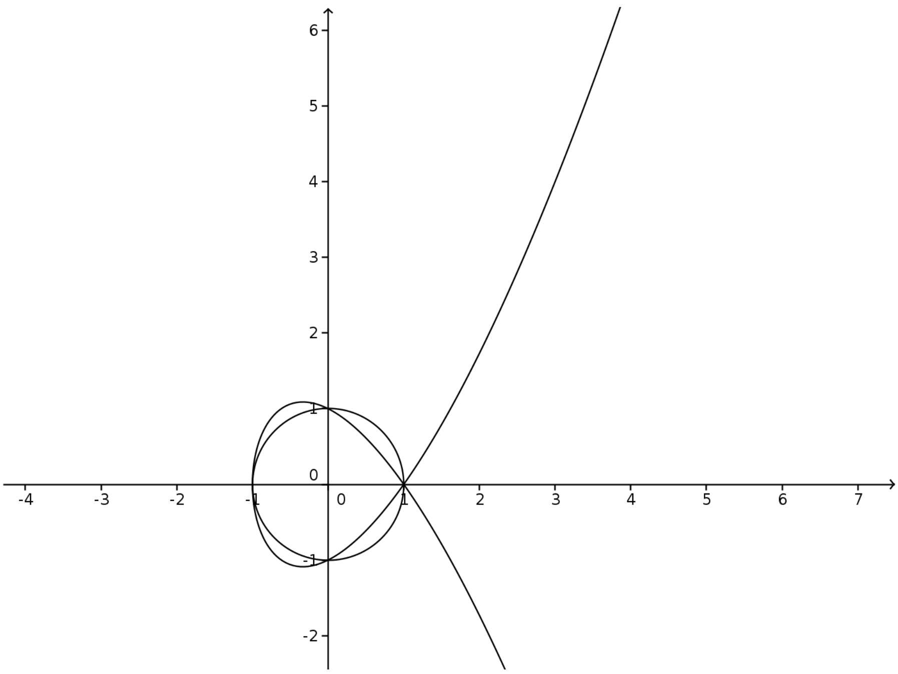
En déduire un polynôme annulateur de $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$.

b) On suppose $\beta \neq 0$. Montrer que le polynôme

$$\text{Rés}_{f(XY),g(Y)}(X)$$

(où $f(XY)$ et $g(Y)$ sont vus dans $\mathbb{Q}[X][Y]$) est un polynôme annulateur de $\frac{\alpha}{\beta}$. En déduire le polynôme minimal de $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

c) Déduire de ce qui précède que l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un corps !


6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7