FEUILLE DE TD N° 6

Exercice 1 Soit k un corps de caractéristique p.

a) Soit $P \in k[X]$ irréductible montrer que si $P' = 0$ alors $P \in k[X^p]$.

b) On suppose que k est fini, montrer que toutes les extensions algébriques de k sont séparables.

Exercice 2 Sur les extensions primitives

Soient $K \leq L$ une extension algébrique.

a) Montrer que $L = K(x)$ pour un certain $x \in L \Leftrightarrow$ il existe un nombre fini de corps intermédiaires $K \leq F \leq L$.

b) En déduire que l'extension $\mathbb{F}_p(X^p, Y^p) \leq \mathbb{F}_p(X, Y)$ n'est pas primitive.

Exercice 3 Groupe de Galois des polynômes de degré 3

a) Après avoir vérifié leur irréductibilité, déterminer le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ des polynômes suivants :

$$X^3 - X - 1,\ X^3 - 3X - 1,\ X^3 - 4X - 1\ .$$

b) Déterminer le groupe de Galois sur $\mathbb{C}(t)$ du polynôme :

$$X^3 + tX + t\ .$$

c) Déterminer le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ du polynôme $X^3 - X^2 - 2X + 1$ et vérifier que les racines sont de la forme :

$$r,\ r^2 - r - 1,\ -r^2 + 2\ .$$

Même question avec $X^3 - 3X - 1$ et les racines

$$r,\ r^2 - r - 2,\ -r^2 + 2\ .$$

Exercice 4 Groupe de Galois des quartiques

On note V le sous-groupe $\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ de S_4.

a) Montrer que V est distingué dans S_4 et que $V \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Soit G un sous-groupe transitif de S_4. Montrer que G est

$$S_4, A_4, V \text{ ou un sous-groupe isomorphe à } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \text{ ou } D_4$$

(on note D_4 le groupe diédral d'ordre 8 (c'est le groupe des isométries du carré)).

c) Soit $P(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$ un polynôme irréductible à coefficients dans un corps k de caractéristique $\neq 2, 3$. Vérifier que $P(X)$ a 4 racines distinctes, x_1, x_2, x_3, x_4 dans son corps de décomposition L.

d) On pose

$$\theta_1 = (x_1+x_2)(x_3+x_4)\ ,\ \theta_2 = (x_2+x_3)(x_1+x_4)\ ,\ \theta_3 = (x_3+x_1)(x_2+x_4)\ .$$

Montrer que $R(X) = (X - \theta_1)(X - \theta_2)(X - \theta_3) = X^3 - 2pX^2 + (p^2 - 4r)X + q^2$.

e) Montrer que $\theta_1 - \theta_2 = (x_3 - x_1)(x_2 - x_4)$. En déduire que $R(X)$ et $P(X)$ ont le même discriminant Δ.

f) Soit G le groupe de Galois de L sur k. On note $G_1 = G \cap V$. Montrer que

$$L^{G \cap V} = k(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

le corps de décomposition de $R(X)$ sur k. On pose $M = k(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

g) Montrer que le tableau suivant décrit bien toutes les possibilités pour le groupe de Galois du polynôme $P(X)$ sur k :

$\Delta \notin k^2$	$R(X)$ irréductible sur k		$G = S_4$
$\Delta \in k^2$	$R(X)$ irréductible sur k		$G = A_4$
$\Delta \in k^2$	$R(X)$ scindé sur k		$G = V$
$\Delta \notin k^2$	$R(X)$ a une racine dans k	$P(X)$ irréductible sur $k(\sqrt{\Delta})$	$G \cong D_4$
$\Delta \notin k^2$	$R(X)$ a une racine dans k	$P(X)$ réductible sur $k(\sqrt{\Delta})$	$G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

Remarque. Vérifier que si $G = V$ ou $\simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, alors $\Delta > 0$ (*indication : dans ces cas, le corps de décomposition est engendré par une racine donc il y a* 0 *ou* 4 *racines réelles !*).

h) *Applications :* Montrer que si le polynôme $X^4 + bX^2 + d$ est irréductible sur k, alors son groupe de Galois est V si d est un carré dans k, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si $d \notin k^2$ et $\frac{b^2}{d} - 4 \in k^2$ et D_4 sinon.
Déterminer les groupes de Galois sur $\mathbb{Q}$ des polynômes $X^4 - X - 1$ et $X^4 + 8X + 12$.