Feuille de TD n° 7

Exercice 1 Sur le groupe de Galois de $X^4 + 8X + 12$ sur $\mathbb{Q}$

Soit $P(X) = X^4 + 8X + 12 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Factoriser $P(X) \bmod 5$ et $\bmod 17$.
Indication. Vérifier que
$$X^4 + 8X + 12 = (X^2 + 4X + 7)(X^2 + 13X + 9) \bmod 17 \ .$$

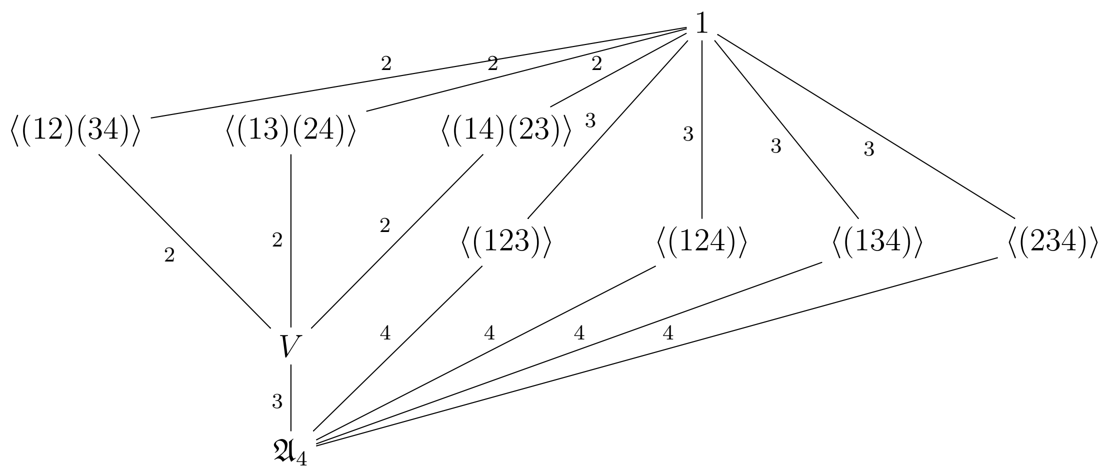
b) En déduire que $X^4 + 8X + 12$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

c) Calculer le discriminant de P. En déduire que P a 4 racines complexes conjuguées deux à deux.

d) On pose :
$$\begin{aligned}
r_1 &= i\sqrt{2\cos\frac{2\pi}{9}} + i\sqrt{2\cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt{-2\cos\frac{8\pi}{9}}\\
r_2 &= -i\sqrt{2\cos\frac{2\pi}{9}} - i\sqrt{2\cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt{-2\cos\frac{8\pi}{9}}\\
r_3 &= -i\sqrt{2\cos\frac{2\pi}{9}} + i\sqrt{2\cos\frac{4\pi}{9}} - \sqrt{-2\cos\frac{8\pi}{9}}\\
r_4 &= i\sqrt{2\cos\frac{2\pi}{9}} - i\sqrt{2\cos\frac{4\pi}{9}} - \sqrt{-2\cos\frac{8\pi}{9}}
\end{aligned}$$
Vérifier que r_1, r_2, r_3, r_4 sont les racines de P.[†]

e) En déduire que $\mathbb{Q}(2\cos\frac{2\pi}{9}) \leq \mathbb{Q}(r_1, r_2, r_3, r_4)$ et que le groupe de Galois du polynôme P sur $\mathbb{Q}$ est le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.

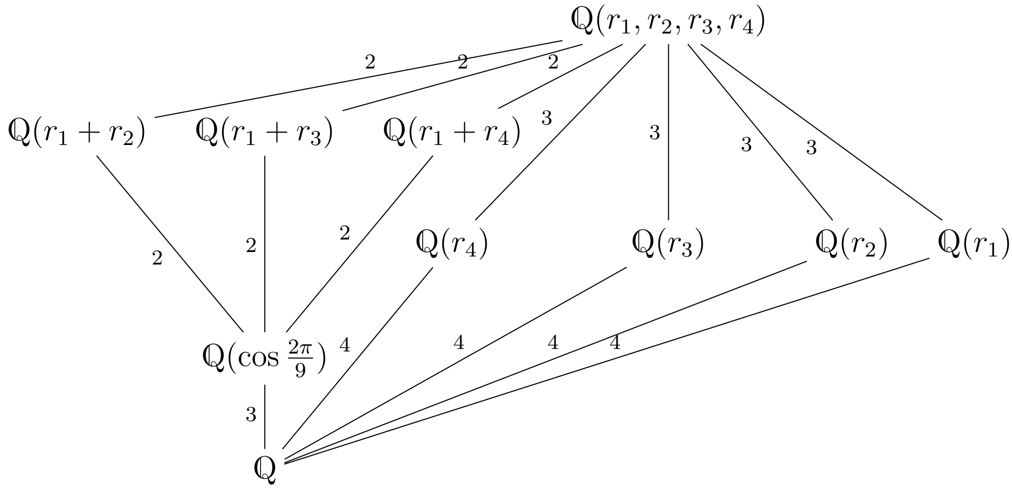
f) Vérifier que les sous-groupes de $\mathfrak{A}_4$ sont dans le tableau suivant :



†. *cf.* la méthode d'Euler de résolution des quartiques dans la feuille de TD n° 1, exercice 5.

Qu'est-ce que V et que signifient les nombres au-dessus des traits ?

g) En déduire le diagramme suivant des sous-corps de $L = \mathbb{Q}(r_1, r_2, r_3, r_4)$:



Que signifient les nombres au-dessus des traits ?

Exercice 2 Un polynôme de groupe de Galois $\mathfrak{S}_5$ sur $\mathbb{Q}$

Soit $P(X) = X^5 - 4X - 1$.

a) Montrer qu'un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_5$ qui contient un $5-$cycle et une transposition est forcément $\mathfrak{S}_5$.

b) Calculer le discriminant de P.

c) En déduire que P a 3 racines réelles et deux racines complexes conjuguées non réelles.

d) Montrer que P n'a pas de racines dans le corps $\mathbb{F}_{3^2}$. †

e) En déduire que P est irréductible sur $\mathbb{F}_3$.

f) En déduire que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

g) Montrer que le groupe de Galois de P sur $\mathbb{Q}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$.

h) Quel est le groupe de Galois sur $\mathbb{F}_3$?

†. *Indication.* Dans un corps de cardinal 9, $^\forall 0 \neq x$, $x^8 = 1$.