Feuille de TD n$^{\mathrm{o}}$ 8

Exercice 1 Intersection de corps cyclotomiques

Soient m, n des entiers > 0. On note $m \wedge n$ et $m \vee n$ leurs pgcd et ppcm.

a) Montrer que $\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{m\vee n})$. *Indication. Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{u}{m} + \frac{v}{n} = \frac{1}{m\vee n}$.*

b) On suppose que $m \wedge n = 1$. Montrer que $[\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n) : \mathbb{Q}(\zeta_m)] \leq \varphi(n)$. En utilisant la question précédente, montrer que $[\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n) : \mathbb{Q}(\zeta_m)] = \varphi(n)$.

c) Sous les hypothèses précédentes, montrer que le morphisme de restriction

$$\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n)/\mathbb{Q}(\zeta_m)\right) \to \mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n)\right)$$

est injectif. En déduire que $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}$.

d) Montrer que $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{m\wedge n})$.

e) Donner un exemple de corps K où $K(\zeta_m) \cap K(\zeta_n) \neq K$ pour certains entiers m, n premiers entre eux. Par exemple considérer $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $m = 3$, $n = 4$.

Exercice 2 Toute extension quadratique est dans une extension cyclotomique

a) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est contenu dans une extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$.

b) Soit p un nombre premier impair. Montrer que $\Delta_{\Phi_p(X)} = \pm p^{p-2}$.

c) En déduire que pour tout nombre premier impair p, $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ sont contenus dans des extensions cyclotomiques de $\mathbb{Q}$.

d) Montrer que toute extension quadratique de $\mathbb{Q}$ est contenue dans une extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\wedge n=1}}^{n} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) .$$

Soit ζ une racine primitive $n-$ième de 1.
Soit Δ le discriminant du polynôme $X^n - 1$.
Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de ζ sur Q.

a) Montrer que $P \mid X^n - 1$ et en déduire que $P \in \mathbb{Z}[X]$.

b) Soit p un nombre premier. Montrer que $P(X^p) = P(X)^p \mod p\mathbb{Z}[X]$.

c) En déduire $p \mid P(\zeta^p)$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[\zeta]$.

d) En déduire $P(\zeta^p) = 0$ ou $p \mid \Delta$ dans $\mathbb{Z}[\zeta]$.

e) Calculer Δ et déduire des questions précédentes :

$$P(\zeta^p) \neq 0 \Rightarrow p \mid n \textit{ dans } \mathbb{Z}.$$

f) Montrer que le polynôme $\Phi_n(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.