Master 1 – Université Lyon I **mercredi 9 mars 2022**
2021–2022

CC1 : Corps et anneaux commutatifs

Durée : 1h30

Les documents ne sont pas autorisés
Les réponses doivent être justifiées

Exercice 1 Soit A une algèbre unitaire sur un corps F. On suppose que A est sans diviseurs de zéro, c-à-d : $a_1 \cdot a_2 \neq 0$ si $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$. Rappelons qu'un élément $\alpha \in A$ est *algébrique* (sur F) s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients dans F.

a) Montrer que si $\dim_F A < \infty$ alors tous les éléments de A sont algébriques.

b) Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, des éléments algébriques de A. Montrer que

   (i) $F[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ est un corps, et

   (ii) $\dim_F F[\alpha_1, \cdots, \alpha_n] < \infty$.

c) Montrer que les éléments algébriques de A constituent un sous-algèbre de A qui est un corps.

d) Montrer que si $\dim_F A < \infty$ alors A est un corps.

Exercice 2 Soit $x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

a) Trouver un polynôme $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 4, unitaire qui annule x_1.

b) Montrer que le polynôme $P(X+1)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et en déduire que :

$$[\mathbb{Q}(x_1) : \mathbb{Q}] = 4$$

c) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(x_1)$. Y a-t-il égalité ?

d) Vérifier que les 4 racines de $P(X)$ sont :

$$x_1 = \sqrt{1+\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{i}{x_1},\ x_3 = -x_1,\ x_4 = -x_2.$$

e) On pose $K = \mathbb{Q}(i, x_1)$. Montrer que $[K : \mathbb{Q}] = 8$ et en déduire que P est *aussi* le polynôme minimal de x_1 sur $\mathbb{Q}(i)$.

f) Montrer que $\operatorname{Aut} K$ est un groupe d'ordre ≤ 8.

g) Justifier l'existence d'un morphisme de corps $\sigma : K \to \mathbb{C}$ tel que $\sigma(x_1) = x_2$ et $\sigma(i) = i$.

h) Montrer que $\sigma \in \operatorname{Aut} K$.

i) On note par τ la restriction sur K de la conjugaison complexe. Montrer que $\tau \in \operatorname{Aut} K$.

j) Déterminer l'ordre de σ, celui de τ et celui de $\sigma\tau$ dans le groupe $\operatorname{Aut} K$

k) Montrer que $\operatorname{Aut} K = \langle \sigma, \tau \rangle$.