Soit $V = \{(t^3, t^4, t^5) \ : \ t \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^3$. Alors

$$\boldsymbol{I(V) = (X^3 - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - X^2Y) \ .}$$

En effet, posons $I = (X^3-YZ, Y^2-XZ, Z^2-X^2Y)$. Il est clair que $I \leq I(V)$. On remarque que l'ensemble

$$\mathbb{C}[X] + \mathbb{C}[X]Y + \mathbb{C}[X]Z + I$$

est un sous-anneau de $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ car stable par produit ! Donc :

$$\mathbb{C}[X,Y,Z] = \mathbb{C}[X] + \mathbb{C}[X]Y + \mathbb{C}[X]Z + I \ .$$

Soit $P \in I(V)$, alors $P = a(X) + b(X)Y + c(X)Z \bmod I$ pour certains $a, b, c \in \mathbb{C}[X]$. Mais alors :

$$^\forall t \in \mathbb{C},\ P(t^3, t^4, t^5) = a(t^3) + b(t^3)t^4 + c(t^3)t^5 = 0$$

car $I \leq I(V)$. Donc dans $\mathbb{C}[T]$:

$$a(T^3) + b(T^3)T^4 + c(T^3)T^5 = 0 \ .$$

Or, les monômes de $a(T^3)$ sont de degrés $0 \bmod 3$, ceux de $a(T^3)T^4$ sont de degrés $1 \bmod 3$ et ceux de $c(T^3)T^5$ de degrés $2 \bmod 5$.

Donc

$$a(T^3) = b(T^3)T^4 = c(T^3)T^5 = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c = 0$$

$$\Rightarrow P \in I \ .$$

Remarque. L'idéal $I(V)$ ne peut pas être engendré par 2 polynômes.

En effet, posons

$$\deg X^\alpha Y^\beta Z^\gamma = 3\alpha + 4\beta + 5\gamma \ .$$

Soit $A = \mathbb{C}[X,Y,Z]$. On décompose :

$$A = \oplus_{d \in \mathbb{N}} A_d$$

où $A_d = \oplus_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ 3\alpha+4\beta+5\gamma=d}} \mathbb{C}X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$. Il est clair que

$$^\forall d, d' \in \mathbb{N},\ A_d A_{d'} \leq A_{d+d'}$$

$$A_0 = \mathbb{C},\ A_1 = A_2 = 0$$

et si on pose $I(V)_d = I(V) \cap A_d$, $I(V) = \oplus_{d \in \mathbb{N}} I(V)_d$. En effet, si $P \in A_d$, alors $P(T^3, T^4, T^5) \in \mathbb{C}T^d$.

Si $P \in A$, on otera P_d la composante de P de degré d et $P_{\leq d} = \sum_{0 \leq k \leq d} P_k$.

Posons

$$f = X^3 - YZ \in I(V)_9,\ g = Y^2 - XZ \in I(V)_8,\ h = Z^2 - X^2Y \in I(V)_{10}\ .$$

Comme $I(V) = Af + Ag + Ah$, comme $A = \mathbb{C} + \oplus_{d \geq 3} A_d$, on a :

$$I(V)_{\leq 10} = I(V)_8 \oplus I(V)_9 \oplus I(V)_{10} = \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}g \oplus \mathbb{C}h$$

donc $I(V)_{\leq 10}$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension 3.

Or si $P_1, ..., P_N$ engendrent l'idéal $I(V)$, l'espace vectoriel $I(V)_{\leq 10}$ est engendré par les polynômes $(P_1)_{\leq 10}, ..., (P_N)_{\leq 10}$. Donc $N \geq 3$.

Remarquons que V peut néanmoins être définie par 2 polynômes. On a :

$$V = V(XZ - Y^2, X^5 - 2X^2YZ + Z^3)\ .$$

Démo. Soient $x, y, z \in \mathbb{C}$. Supposons que

$$xz = y^2,\ x^5 - 2x^2yz + z^3 = 0\ .$$

Si $x = 0$, alors $x = y = z = 0$ et $(x, y, z) \in V$. Si $x \neq 0$, posons $t = \frac{y}{x}$. On a :

$$y = tx \Rightarrow xz = t^2x^2 \Rightarrow z = t^2x$$

Donc

$$\begin{aligned} x^5 - 2x^2yz + z^3 = 0 &\Rightarrow x^5 - 2t^3x^4 + t^6x^3 = 0 \\ &\Rightarrow x^3(x - t^3)^2 = 0 \\ &\Rightarrow x = t^3 \end{aligned}$$

d'où :

$$(x, y, z) = (t^3, t^4, t^5) \in V\ .$$