Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

MG1 - Algèbre commutative Durée : 3h + 30 min.

Contrôle terminal

Le sujet est sur deux pages.

Exercice 1. Soit $\mathbf{k}$ un corps et N l'ensemble des matrices nipotentes de $M_n(\mathbf{k})$. Montrer que N est un ensemble algébrique affine et que $I(N)$ possède un système de générateurs de cardinal n.
Indication : on pensera au polynôme caractéristique.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^2$, soient $A = \{(\cos(x), \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(\cos(2x), \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Ces ensembles sont-ils des ensembles algébriques affines ?

Exercice 3. On pose $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et $\alpha = \sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}$.

a) Montrer que l'extension $E/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Montrer que $E \leq \mathbb{Q}(\alpha)$. *Indication : vérifier que lorsque g décrit $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, les $g(\alpha^2)$ sont deux à deux distincts et en déduire que $E = \mathbb{Q}(\alpha^2)$.*

c) On pose $\beta = \sqrt{(2-\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}$, $\gamma = \sqrt{(2+\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}$, $\delta = \sqrt{(2-\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}$.
Montrer que $(X^2-\alpha^2)(X^2-\beta^2)(X^2-\gamma^2)(X^2-\delta^2) \in \mathbb{Q}[X]$ *(on calculera explicitement les coefficients).*

d) En déduire que $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ est galoisienne. On notera $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$.

e) Justifier l'existence d'un $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ tel que $\sigma(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$. Montrer que $\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} = \pm\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$.

f) Montrer que $\sigma^2(\alpha) = -\alpha$ et en déduire que α est de degré 2 sur E et que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}(\sqrt{2})) = \langle\sigma\rangle$ est cyclique d'ordre 4.
Quel est l'ordre de G ?

g) De même montrer que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ et $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}(\sqrt{6}))$ sont cycliques d'ordre 4.

h) Soit τ un générateur de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$. Montrer que $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

i) Montrer que $\sigma^2 = \tau^2$ est le seul élément d'ordre 2 de G.

j) En déduire que E est le seul sous-corps de $\mathbb{Q}(\alpha)$ de degré 4 sur $\mathbb{Q}$.

k) Montrer que G est non abélien et non isomorphe à D_4, groupe diédral d'ordre 8.

l) Donner tous les sous-corps de $\mathbb{Q}(\alpha)$.

m) Donner un exemple d'extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois isomorphe au groupe diédral D_4 d'ordre 8.

l'exercice 4 ci-dessous est hors programme en 2022 !

Exercice 4. Soit $\mathbf{k}$ un corps et soit $\mathbb{K} = \mathbf{k}(y_1, \ldots, y_m)$. Soit alors I un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. On suppose que I est donné par un système fini de générateurs G et on se donne un bon ordre monomial $\preceq$ sur les $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Le but [1] est de montrer qu'on peut construire une $\preceq$-base de Gröbner de I à partir de G en faisant les calculs dans $\mathbf{k}[y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n]$.

1. Montrer qu'il existe un système fini G_1 de générateurs de I tel que $G_1 \subset \mathbf{k}[y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n]$.

On définit alors I_1 comme l'idéal de $\mathbf{k}[y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_m]$ engendré par G_1. On définit un ordre $\preceq 1$ sur les $y^\beta x^\alpha$ ($\beta \in \mathbb{N}^m, \alpha \in \mathbb{N}^n$) de la façon suivante :

$$y^\beta x^\alpha \prec_1 x^{\beta'} x^{\alpha'} \iff \left(x^\alpha \prec x^{\alpha'} \text{ ou } \left(x^\alpha = x^{\alpha'} \text{ et } y^\beta \prec_0 y^{\beta'}\right)\right)$$

où $\preceq_0$ est un bon ordre fixé sur les y^β. Soit G_2 une $\preceq_1$-base de Gröbner de I_1.

2. Montrer que $G_2 \cap \mathbf{k}[y_1, \ldots, y_m] \neq \emptyset \iff I = \mathbb{K}$

3. On suppose que $G_2 \cap \mathbf{k}[y_1, \ldots, y_m] = \emptyset$. Montrer que G_2 est une $\preceq$-base de Gröbner de I.

1. En effet, certains logiciels de calcul formel n'acceptent pas $\mathbf{k}(y_1, \ldots, y_m)$ comme corps de base.