Fiche 6
9 avril 2014

Exercice 1 (Polynômes de Tchebytcheff).
On définit par récurrence les *polynômes de Tchebytcheff* dans $\mathbb{Z}[X]$.

$$T_0 \;=\; 1 \;\;;\; T_1 \;=\; X \;;\; \text{pour tout } \; n\in\mathbb{N}\;,\; T_{n+2} \;=\; 2XT_{n+1}-T_n \quad .$$

I. Propriétés élémentaires :

Montrer les propriétés suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n + z^{-n} = 2T_n(\frac{z+z^{-1}}{2})$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de T_n sont les $\cos((2k+1)\pi/(2n))$ où $0 \le k \le n-1$.

II. Sous-corps réels des extensions cyclotomiques : On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et définit $u = e^{2i\pi/n}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(u)/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne.
2. Montrer que
$$\mathbb{Q}(u)\cap\mathbb{R} \;=\; \mathbb{Q}(u+u^{-1}) \;=\; \mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)) \;.$$
Si n est premier, alors montrer que $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))/\mathbb{Q}$ est l'unique sous-extension de de $\mathbb{Q}(u)/\mathbb{Q}$ de degré $\frac{n-1}{2}$.

III. Polynôme minimal de $\cos(2\pi/n)$ pour $n \geq 3$:

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et de terme constant non nul. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, z est racine de P si et seulement si z^{-1} est racine de P ;
   (b) Soit pour tout $0 \le k \le n$, $a_{n-k} = a_k$, soit pour tout $0 \le k \le n$, $a_{n-k} = -a_k$.
2. Montrer que pour $n \geq 3$, $\Phi_n(X)$ satisfait la première condition de (b) dans le point précédent et que son degré, $\varphi(n)$, est pair.
3. Montrer alors que si $\Phi_n(X)$ est de la forme
$$X^{\varphi(n)}+1 \;+\; b_{\varphi(n)-1}(X^{\varphi(n)-1}+X) \;+\; \dots \;+\; b_{\frac{\varphi(n)}{2}+1}(X+X^{-1}) \;+\; b_{\frac{\varphi(n)}{2}}\; X^{\frac{\varphi(n)}{2}} \quad ,$$
alors le polynôme minimal de $\cos(2i\pi/n)$ est
$$\frac{1}{2^{\frac{\varphi(n)}{2}}}\;\sum_{i=0}^{\varphi(n)/2}\left(b_{(\varphi(n)/2)-i}\;T_i(X)\right) \quad ,$$
ou encore
$$\frac{1}{2^{\frac{\varphi(n)}{2}}}\left(b_{\frac{\varphi(n)}{2}} \;+\; \sum_{i=1}^{\varphi(n)/2} 2b_{(\varphi(n)/2)+i}\;T_i(X)\right) \quad .$$

Exercice 2 (Extensions cyclotomiques : degré non premier).

1. Calculer $\Phi_{15}(X)$ et montrer que le polynôme minimal de $\cos(2\pi/15)$ sur $\mathbb{Q}$ est le polynôme : $X^4 - \frac{1}{2}X^3 - X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{16}$.
2. Déterminer $\cos(2\pi/5)$. En déduire que $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ est une sous-extension de $\cos(2\pi/15)$.
3. Déterminer le polynôme minimal de $\cos(2\pi/15)$ sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Exercice 3 (Polynômes cyclotomiques : degré premier).
On fixe p premier et définit $u = e^{2i\pi/p}$. Soit p un nombre premier. Soient $u = e^{2i\pi/p}$ et H_f l'unique sous-groupe d'ordre f de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. On définit une $f-$période comme la somme :

$$u_{f,l} \;=\; \sum_{a \in lH_f} u^a$$

pour tout l premier à p.

1. Soient e, f des entiers positifs tels que $ef = p-1$. Soient $u_{f,l_1}, ..., u_{f,l_e}$ les différentes $f-$périodes. Montrer que
$$(X - u_{f,l_1}) \;\ldots\; (X - u_{f,l_e})$$
est le polynôme minimal de toute $f-$période sur $\mathbb{Q}$.
2. Si $u_{(f,l)}, u_{(f,m)}$ sont des $f-$périodes avec p premier l, m alors vérifier que :
$$u_{(f,l)}u_{(f,m)} \;=\; \sum_{l' \in lH_f} u_{(f,l'+m)} \quad .$$
3. Dans le reste de l'exercice, on supposera que $p = 17$. Montrer que 3 est un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ pour la multiplication.
4. Exprimer $u_{8,1}$ et $u_{8,3}$ en fonction de u et montrer que :
$$u_{8,1} + u_{8,3} \;=\; -1 \;\text{ et }\; u_{8,1}u_{8,3} \;=\; -4 \quad .$$
En déduire $u_{8,1}$ et $u_{8,3}$.
5. De même, montrer que les $4-$périodes sont les racines des polynômes :
$$X^2 - u_{8,1}X - 1 \;\text{ et }\; X^2 - u_{8,3}X - 1$$
et en particulier que :
$$u_{4,1} \;=\; 1/4\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) \quad , \quad u_{4,2} \;=\; 1/4\left(-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) \quad ,$$
$$u_{4,3} \;=\; 1/4\left(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right) \quad .$$
6. Montrer que $u_{2,1}$ et $u_{2,4}$ sont racines de l'équation $X^2 - u_{4,1}X + u_{4,3} \;=\; 0$.
En déduire que $\cos(2\pi/17) \;=$
$$-\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \quad .$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(u) \arrow[d, dash, "2"] & \\
\mathbb{Q}(u)^{H_2} \arrow[r, equal] \arrow[d, dash, "2"] & \mathbb{Q}(\cos(2\pi/17)) \\
\mathbb{Q}(u)^{H_4} \arrow[r, equal] \arrow[d, dash, "2"] & \mathbb{Q}(\sqrt{34-2\sqrt{17}}) \\
\mathbb{Q}(u)^{H_8} \arrow[r, equal] \arrow[d, dash, "2"] & \mathbb{Q}(\sqrt{17}) \\
\mathbb{Q}(u)^{H_{16}} \arrow[r, equal] & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}
$$

7. Déterminer le polynôme minimal $\cos(2\pi/17)$ sur $\mathbb{Q}$.