Fiche 3
4 février 2015

Exercice 1 (Rappels élémentaires sur les extensions galoisiennes).

1. Soient L et K deux corps. On suppose que L est le corps de décomposition d'un polynôme séparable $P \in K[X]$. Montrer que l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur les racines de P est transitive si, et seulement si, P est irréductible sur K.
2. Soit $P(X)$ un polynôme séparable sur un corps K. On suppose que $P(X) = P_1(X) \dots P_k(X)$, où chaque P_i est irréductible dans $K[X]$ de degré n_i, et que son groupe de Galois G soit cyclique.
   (a) Montrer que le groupe de Galois de P agit transitivement sur les racines de chaque P_i.
   (b) Déduire que, quitte à réindexer les racines, G est engendré par un produit de k cycles de la forme
   $$(1\ 2\ \dots\ n_1)(n_1+1\ \dots\ n_1+n_2)\ \dots\ (n_1+\dots+n_{k-1}+1\ \dots\ n_1+\dots+n_k)\quad .$$

Exercice 2 (Le groupe de Galois d'un polynôme de degré 3).

On étudie le polynôme $P(X) = X^3 + aX + b$ de $K[X]$ où K est un corps de caractéristique différente de 3. On supposera P irréductible. On notera L son corps.

1. Montrer que L/K est une extension galoisienne. On pose $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.
2. Montrer que G est isomorphe à S_3 ou à A_3 (les groupes symétrique et alterné respectivement). On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les racines de P et on définit $\delta = \prod_{1 \le i < j \le 3} (\alpha_i - \alpha_j)$.
3. Montrer que G est isomorphe à A_3 si et seulement si $\delta \in K$.
4. Illustrer chacune des deux possibilités par des exemples de polynômes irréductibles de racines réelles dans le cas où $K = \mathbb{Q}$.

Exercice 3 (Le groupe diédral D_4 comme groupe de Galois).

On fixe un nombre premier p et définit $P(X) = X^4 - p$ dans $\mathbb{Q}[X]$. On notera L le corps de décomposition de P.

1. Montrer que $L/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne et que $L = \mathbb{Q}(\alpha, i)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha = \sqrt[4]{p}$. On notera G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.
2. Montrer que G est d'ordre 8.
3. Montrer que G est isomorphe au groupe diédral D_4.
4. Expliciter tous les sous-groupes de D_4 et en déduire les sous-corps de $L/\mathbb{Q}$ (*Il y en a 8 qui sont stricts).*

Exercice 4 (Le groupe diédral en général).

Soit G le sous-groupe des automorphismes de $\mathbb{C}(t)$ engendré par
$$t \longmapsto \zeta t \quad \text{et} \quad t \longmapsto t^{-1}$$
où ζ est une racine primitive $n-$ième de 1.

(a) Montrer que G est isomorphe au groupe diédral d'ordre $2n$.

(b) Montrer que $\mathbb{C}(t)^G = \mathbb{C}(t^n + t^{-n})$.

Exercice 5 (Extensions finies, éléments primitifs).

(a) Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})/\mathbb{Q}$.

(b) Déterminer les plongements de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})$ dans $\mathbb{C}$.

(c) Trouver un élément primitif pour l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5})/\mathbb{Q}$.