# Fiche 7
**11 mars 2015**

**Exercice 1 (Récapitulons).**
Soit $K$ un corps de caractéristique $p$ non nulle. Montrer que le polynôme $X^p - X - a \in K[X]$ est irréductible dans $K[X]$ si et seulement si $a \neq c^p - c$ pour tout $c \in K$.

**Exercice 2 (Séparables/Inséparables).**
**I.** Soient $K$ un corps de caractéristique non nulle $p$ et $P \in K[X]$ irréductible.

1. Montrer qu'il existe $e \in \mathbb{N}$ et $Q$ irréductible dans $K[X]$ et séparable tels que $P(X) = Q(X^{p^e})$.
2. Montrer que chaque racine de $P$ est de multiplicité $p^e$.

**II.** Soit $E/F$ une extension normale de degré fini de corps en caractéristique $p \neq 0$.

1. Montrer que l'ensemble $I$ des éléments purement inséparables sur $F$ est un sous-corps contenant $F$.
2. Montrer que $E/I$ est une extension séparable, donc galoisienne.

**III.** Soient $K$ un corps de caractéristique $p$ non nulle, $t$ un élément transcendant sur $K$ et $P \in K(t)[X]$ défini par $X \mapsto X^{p^3} - X^{p^2} - t$.

1. Vérifier que $P$ est irréductible dans $K(t)[X]$. Quel est le nombre de ses racines distinctes et la multiplicité de chacune ?
2. Soit $\alpha$ une racine de $P$. Quel est le polynôme minimal de $\alpha$ sur le sous-corps des éléments purement inséparables sur $F$.
3. Quel est le degré séparable du corps de décomposition de $P$ sur $K(t)$ ?

**Exercice 3 (Éléments primitifs).**

1. Soit $L/K$ une extension galoisienne. Énoncer une condition suffisante et nécessaire pour qu'un élément $\alpha \in L$ soit primitif.
2. Déterminer un élément primitif pour chacune des extensions suivantes :
   (a) le corps de décomposition de $X^4 - p \in \mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$ (voir la fiche 3) ;
   (b) le corps de décomposition de du polynôme $X^p - q \in \mathbb{Q}[X]$ sur $\mathbb{Q}$ (voir la fiche 1) ;
   (c) $k(X_1, \dots, X_n)/k(s_1, \dots, s_n)$ où $k$ est un corps arbitraire et les $s_i$ sont les polynômes symétriques élémentaires en $X_1, \dots, X_n$.

**Exercice 4 (Bases normales).**
Soit $L/K$ une extension galoisienne. Pour tout $a \in L$, $\{\sigma(a) | \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)\}$ est une base normale si et seulement si le déterminant de la matrice $(\sigma\tau(a))_{(\sigma,\tau)\in \mathrm{Gal}(L/K)\times \mathrm{Gal}(L/K)}$ est inversible. (*Notons qu'une base d'un espace vectoriel proprement dite est un ensemble ordonné. Ainsi, il est sous-entendu que* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *est muni d'un ordre.*)

Montrer que les bases suivantes sont normales pour les extension respectives :

1. les conjugués de $1 + i$ pour $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ;
2. les conjugués de $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ pour $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ ;
3. les conjugués de $X_1 X_2^2 \dots X_n^n$ pour $k(X_1, \dots, X_n)/k(s_1, \dots, s_n)$.