Corrigé de l'examen final du mercredi 14 mai 2014

Le corps k est algébriquement clos.

Exercice 1 a) D'après Bézout, $|F_1 \cap F_2| > 0$. Dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, les fermés $\{[1:0]\} \times \mathbb{P}^1$ et $\{0:1\} \times \mathbb{P}^1$ sont irréductibles de dimension 1 et d'intersection vide. Donc $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \not\simeq \mathbb{P}^2$.

b) On a $(xz)(yt) - (xt)(yz) = 0$ donc $\operatorname{Im} f \subseteq F$. La réciproque est un morphisme :

$$f^{-1} : F \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1,\ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto \begin{cases} ([x_0 : x_2], [x_0 : x_1]) & \text{si } x_0 \neq 0, \\ ([x_1 : x_3], [x_0 : x_1]) & \text{si } x_1 \neq 0, \\ ([x_0 : x_2], [x_2 : x_3]) & \text{si } x_2 \neq 0, \\ ([x_1 : x_3], [x_2 : x_3]) & \text{si } x_3 \neq 0, \end{cases}$$

Exercice 2 a) $\dim_k k[X,Y,Z]_d = \binom{d+2}{2}$. Si $P \in \mathbb{P}^2$, le sous-espace des $h \in k[X,Y,Z]_d$ tels que $h(P) = 0$ est un hyperplan. L'intersection de $\binom{d+2}{2} - 1$ hyperplan est un sous-espace de dimension ≥ 1 donc non nul !

b) On a $\binom{d-1}{2} + 1 + 3d - 3 + 1 = \binom{d+1}{2} - 1$. Donc il existe une courbe $C' \subseteq \mathbb{P}^2$ de degré d qui passe par $P_1, ..., P_N, Q_1, ..., Q_{3d-3}, Q$.
On a $I_P(C, C') \geq \operatorname{mult}_P C' \operatorname{mult}_P C \geq 2$ si $P = P_1, ..., P_N$. Donc $\sum_{P \in C \cap C'} I_P(C, C') \geq (d-1)(d-2) + 2 + 3d - 3 = d^2 + 1 > d^2$. Donc par Bézout, $C' = C$ car C est irréductible. C'est *absurde* car $Q \in C' \setminus C$.

Exercice 3 a) Si $\partial_X F = \partial_Y F = \partial_Z F = 0$, alors $F \in k[X^p, Y^p, Z^p]$ où p est la caractéristique de k. Or, si k est algébriquement clos, $k = k^p$ donc F est une puissance $p$ième d'un polynôme : *absurde !*.

b) Si F, G avaient un facteur commun, alors $V(F) \cap V(G)$ serait infini. D'après Bézout, $\sum_{P \in V(F) \cap V(G)} I_P(F, G) = de$. Or pour tout $P \in V(F) \cap V(G)$, $I_P(F, G) \geq 1$. Donc comme $|V(F) \cap V(G)| = de$, on a $I_P(F, G) = 1$ pour tout $P \in V(F) \cap V(G)$ donc l'intersection est transverse.

c) Pour tout i, soit H_i l'hyperplan des formes linéaires sur k^3 qui s'annulent en x_i. Les x_j sont deux à deux non proportionnels donc les H_j sont deux à deux distincts. Comme un hyperplan est un fermé irréductible de $(k^3)^*$, on a : $H_i \not\subseteq \cup_{\substack{j \\ j \neq i}} H_j$ donc il existe $\lambda_i \in (k^3)^*$ tel que $\lambda_i(x_i) = 0$ et $\forall j \neq i$, $\lambda_i(x_j) \neq 0$. De même, $\cup_i H_i \neq (k^3)^*$ donc il existe $\lambda \in (k^3)^*$ tel que $V(\lambda, F, G) = \emptyset$.Soit i. On a $\operatorname{Im} \Phi$ qui est un sous-espace de k^{de} qui contient le $\Phi(\lambda^{n-de+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{de} \lambda_j)$ qui est le $i$ième vecteur de la base canonique. Donc $\operatorname{Im} \Phi = k^{de}$.
Donc $\dim_k \ker \Phi = \binom{n+2}{2} - de$. Or, $k[X,Y,Z]_{n-d} F + k[X,Y,Z]_{n-e} G \leq \ker \Phi$ et de la suite exacte courte :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & k[X,Y,Z]_{n-d-e} \arrow[r] & k[X,Y,Z]_{n-d} \oplus k[X,Y,Z]_{n-e} \arrow[r] & k[X,Y,Z]_{n-d}F + k[X,Y,Z]_{n-e}G \arrow[r] & 0 \\ & h \arrow[r, mapsto] & hG \oplus -hF & & \\ & & p \oplus q \arrow[r, mapsto] & pF + qF & \end{tikzcd}$$

on tire que

$$\dim_k k[X,Y,Z]_{n-d}F + k[X,Y,Z]_{n-e}G = \dim_k k[X,Y,Z]_{n-e} + \dim_k k[X,Y,Z]_{n-d} - \dim_k k[X,Y,Z]_{n-d-e} = \binom{n\ -}{2}$$

Donc $k[X,Y,Z]_{n-d}F + k[X,Y,Z]_{n-e}G = \ker \Phi$.
Comme $V(H) \supseteq V(F, G) \Leftrightarrow H \in \ker \Phi$ on a bien $\mathscr{P}_n$ vraie si $n \geq de - 1$.

d) Par hypothèse de récurrence, il existe $A_\lambda \in k[X,Y,Z]_{m-d}$, $B_\lambda \in k[X,Y,Z]_{m-e}$ tels que $\lambda H = A_\lambda F + B_\lambda G$. D'après Bézout, $d = \sum_P I_P(V(\lambda), V(F)) = \sum_{\substack{P \\ P\in V(\lambda)\cap V(F)}} 1 = |V(\lambda, F)|$. L'application ψ est linéaire et a pour noyau $\{h \in k[X,Y,Z]_N \ : \ \forall x \in E',\, h(x) = 0\}$. Comme tous les points de E' sont alignés sur la droite $V(\lambda)$, si $h \in \ker\psi$, alors d'après Bézout, $|V(h,\lambda)| \geq |E'| > \deg h \Rightarrow \lambda | h$ (et réciproquement). donc $\ker\psi = \lambda k[X,Y,Z]_{N-1}$. Donc $\dim_k \operatorname{Im}\psi = \binom{N+2}{2} - \binom{N+1}{2} = N+1$ et ψ est surjective. Donc il existe $Q \in k[X,Y,Z]_N$ tel que pour tout $x \in E'$, $Q(\widehat{x}) = \frac{B_\lambda(\widehat{x})}{F(\widehat{x})}$. On pose $A := A_\lambda + GQ$ et $B := B_\lambda - FQ$. On a bien :

$$AF + BG = A_\lambda F + B_\lambda G = \lambda H$$

et $V(B) \supseteq E'$. Si $x \in E$, alors $BG(x) = 0$ et $G(x) \neq 0$ car $V(\lambda, F, G) = \emptyset$. Donc $B(x) = 0$. Comme $\deg B = m - e$ et $V(\lambda, B) \supseteq E \cup E'$ de cardinal $m - e + 1$, $\lambda | B$ par Bézout. Donc $\lambda | AF$. Comme $\lambda \not| F$ (sinon $V(\lambda, F, G) = V(\lambda, G) \neq \emptyset$), on a aussi $\lambda | A$. Donc $H = \frac{A}{\lambda} F + \frac{B}{\lambda} G$ et $\mathscr{P}_{m-1}$ est vraie.

e) Si $V_P(\lambda, F, G) = \emptyset$, alors $\lambda \not| G$. Donc $x \in V(\lambda, F) \Rightarrow B(x) = 0$ donc $|V(B,\lambda)| \geq |V(\lambda, F)| = d \geq n - e + 1 > n - e = \deg B$. Par Bézout, $\lambda | B$ et donc $\lambda | A$ (car $V(\lambda, F, G) = \emptyset \Rightarrow \lambda \not| F$. Donc :

$$H = H = \frac{A}{\lambda} F + \frac{B}{\lambda} G$$

et $\mathscr{P}_{n-1}$ est vraie.

f) Démonstration du lemme : soit D une droite qui ne rencontre pas $V(F,G)$ ni $V(F)^{\text{sing}}$ et qui n'est pas une tangente $T_P V(F)$, $P \in V(F)^{rég}$. Alors si $P \in D \cap V(F)$, on a $I_P(D, V(F)) = \text{mult}_P D \text{mult}_P F = 1$. Pour tout Q, E_Q est une droite de $\mathbb{P}^2$ donc de dimension 1. De plus :

$$\dim \overline{\varphi(V(F)^{rég})} \leq \dim V(F) = 1 \ .$$

Donc $\dim(\varphi(V_{\mathbb{P}^2}(F)^{rég}) \cup \cup_Q E_Q) < 2$ et $\varphi(V_{\mathbb{P}^2}(F)^{rég}) \cup \cup_Q E_Q \underset{\neq}{\subset} \mathbb{P}^2$. Soit $[a:b:c] \in \mathbb{P}^2 \backslash (\varphi(V_{\mathbb{P}^2}(F)^{rég}) \cup \cup_Q E_Q)$, la droite $D := \{[x:y:z] \ : \ ax + by + cz = 0\}$ convient.

Exercice 4 a) On a forcément $I_P(C_1, C_2) = 1$ si $P \in C_1 \cap C_2$. Or, $I_P(C_1 \cap C_2) \geq \text{mult}_P C_1 \text{mult}_P C_2$ donc $\text{mult}_{P_1} C_2 = 1$ *i.e.* P_1 est un point lisse de C_2.

b) On peut se contenter de compter les tangentes de la forme $T_P C_2$ où $P \in C_2^{rég}$. Soit F_2 un générateur de $I(C_2)$. Soit $F_2 = R_1 ... R_s$ la décomposition en facteurs irréductibles (homogènes distincts). Notons $P_1 := [x_1 : y_1 : z_1]$.

Alors $P_1 \in T_P C_2 \Leftrightarrow \exists 1 \leq j \leq s, \begin{cases} \partial_X R_j(P) x_1 + \partial_Y R_j(P) y_1 + \partial_Z R_j(P) z_1 = 0 \\ R_j(P) = 0 \end{cases}$. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer $P_1 = [1:0:0]$. Alors : $P_1 \in T_P C_2 \Leftrightarrow \exists 1 \leq j \leq s, \begin{cases} \partial_X R_j(P) = 0 \\ R_j(P) = 0 \end{cases}$.

Si $\partial_X R_j = 0$ alors $R_j \in k[Y,Z]$. Comme R_j est irréductible, R_j est donc une forme linéaire donc $T_P C_2 = V(R_j)$ si $P \in C_2^{rég} \cap V(R_j)$. Conclusion une tangente à C_2 qui passe par P_1 est de la forme $V(R_j)$ où R_j est de degré 1 ou $T_P C_2$ avec P dans l'ensemble fini $\cup_{\substack{i \\ \deg R_i > 1}} V(R_i, \partial_X R_i) \cap C_2^{rég}$.

c) Parmi le nombre infini de droites D qui passent par P_1, on en choisit une qui n'est pas une tangente à C_2 et qui n'est pas une des droite $(P_1 Q)$ où Q décrit $\{P_2, ..., P_{d_1 d_2}\} \cup C_2^{\text{sing}}$. Une telle droite D vérifie : $I_P(D, C_2) = 0$ ou 1 et $D \cap C_1 \cap D_2 = \{P_1\}$. En particulier, $|D \cap C_2| = d_2$.

d) Il est clair que $V(\lambda F) \supseteq C_1 \cap C_2$ donc il existe $A \in k[X,Y,Z]_{d_1+d_2-3+1-d_1} = k[X,Y,Z]_{d_2-2}$ et $B \in k[X,Y,Z]_{d_1+d_2-3+1-d_2} = k[X,Y,Z]_{d_1-2}$ tels que $\lambda F = AF_1 + BF_2$.

e) Si $x \in D \cap C_2 \setminus C_1$, alors $A(x)F_1(x) = 0$ et donc $A(x) = 0$. Donc $|D \cap V(A)| \geq |D \cap C_2 \setminus \{P_1\}| = d_2 - 1 > \deg A$. Par Bézout, D est une composante de A. Donc $\lambda|A$ et $\lambda|BF_2$. Comme $D \cap C_2$ est fini, $\lambda \not| F_2$ d'où $\lambda|B$ et on a :

$$F = \frac{A}{\lambda}F_1 + \frac{B}{\lambda}F_2$$

en particulier, $C = V(F)$ passe par P_1.