Examen final
lundi 7 janvier 2013
durée : 4h

Soit k un corps algébriquement clos.

Exercice 1 On suppose que k est de caractéristique $\neq 2$. Déterminer le rang du groupe $\mathrm{SO}_{2n}(k)$, $n \geq 1$ *(indication : on pourra considérer la forme quadratique $q(x_1, ..., x_{2n}) = x_1x_2 + ... + x_{2n-1}x_{2n}$).*

Exercice 2 Soit $G = \mathrm{GL}_n$, $n \geq 2$. Soit $V = k^n$. On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de V.

a) Montrer que V est une représentation irréductible de G.

b) Soit T le tore des matrices diagonales. Quels sont les poids de T dans V (*i.e.* les caractères propres) ? Quel est le plus haut poids de V relativement à B le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures ?

c) Soit P le stabilisateur de ke_n dans G. Justifier que P est un sous-groupe parabolique de G. Calculer $\dim P$.

d) Soit B^- le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires inférieures.
Soit $\omega \in X^*(P)$ tel que $\forall\, p \in P$, $p.e_n = \omega^{-1}(p)e_n$. Pour tout entier $r \geq 0$, on pose :

$$H^0(r\omega) := \{f \in k[G] \ : \ \forall\, g \in G, \forall\, b \in B^-,\ f(gb) = \omega^{-r}(b)f(g)\}\ .$$

Montrer que $k[P/B^-] = k$ et en déduire que :

$$H^0(r\omega) = \{f \in k[G] \ : \ \forall\, g \in G, \forall\, p \in P,\ f(gp) = \omega^{-r}(p)f(g)\}$$

(indication : si $f \in H^0(r\omega)$ et si $g \in G$, considérer la fonction $p \mapsto \omega^r(p)f(gp)$).

e) Soit $H := \ker \omega \leq P$. Montrer que l'application $G \to V$, $g \mapsto g.e_n$ induit un isomorphisme : $G/H \simeq G.e_n = V \setminus \{0\}$.

f) Si $r \geq 0$ on pose :

$$S_r := \{f \in k[V] \ : \ \forall\, t \in k, \forall\, v \in V,\ f(tv) = t^r f(v)\}\ .$$

Montrer que S_r est une représentation de G isomorphe à $H^0(r\omega)$.

g) Soit U le radical unipotent de B. Déterminer $H^0(r\omega)^U$ et S_r^U. En déduire que le $G-$module simple de plus haut poids $r\omega$ est isomorphe au sous-$G-$module de S_r engendré par X_n^r (où on note $X_n \in k[V]$ la fonction : $V \to k$, $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_n$).

Exercice 3 Soient $T \leq B \leq G$ des groupes algébriques où G est réductif connexe, B est un sous-groupe de Borel de G et T un tore maximal de B (donc de G). On notera $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On notera R l'ensemble des racines de (G, T). Si $\alpha \in R$, on notera U_α le sous-groupe fermé unipotent de G isomorphe à $\mathbb{G}_a$ dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_\alpha$, le sous-espace propre de $\mathfrak{g}$ associé à α (pour l'action adjointe de T). Soit R^+ l'ensemble des racines positives relativement à B. On notera U le radical unipotent de B et B^- le sous-groupe de Borel de G engendré par T et les $U_{-\alpha}$, $\alpha \in R^+$. Soit $W = N_G T/T$ le groupe de Weyl de (G, T). Si $\alpha \in R$, on notera s_α l'élément correspondant de W (on rappelle que s_α est l'élément non trivial de $N_{G_\alpha}T/T$ où $G_\alpha := Z_G((\ker\alpha)^0)$). Soit Δ l'ensemble des racines simples de R^+ (ce sont les racines positives qui sont indécomposables en somme de racines positives). On rappelle que W est engendré par les s_α, $\alpha \in \Delta$.

Si $w \in W$ on note $l(w)$ le plus petit entier $h \geq 0$ tel qu'il existe $\alpha_1 ..., \alpha_h \in \Delta$ tels que $w = s_{\alpha_1}...s_{\alpha_h}$; $l(w)$ est la *longueur* de w. On convient que $l(1) = 0$. Si $w \in W$, si λ est un caractère de T, alors on note $w(\lambda)$ le caractère :

$$w(\lambda) : T \to \mathbb{G}_m,\ t \mapsto \lambda(n_w^{-1} t n_w)$$

pour un relevé quelconque n_w de w dans $N_G T$. Bien entendu, $w(\lambda)$ ne dépend pas du relevé n_w choisi. On obtient ainsi une action de W sur l'ensemble das caractères de T : $W \times X^*(T) \to X^*(T)$, $(w, \lambda) \mapsto w(\lambda)$.

a) Si $w \in W$, et n_w est un relevé de w dans $N_G T$, on note $C(w) := B n_w B$ et X_w l'image de $C(w)$ dans G/B par la surjection canonique $\pi : G \to G/B$. Vérifier que $C(w)$ ne dépend pas du relevé n_w choisi et que $C(w) = U n_w B$.

b) On suppose jusqu'à la question d) comprise que $G = \mathrm{GL}_n$, que B est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de G et que T est le tore des matrices diagonales.

   On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1...n\}$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note P_σ la matrice :
   $$P_\sigma := \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)\ .$$
   Vérifier que $\mathfrak{S}_n \to N_G T/T$, $\sigma \mapsto P_\sigma \bmod T$ est un isomorphisme de groupes. On identifiera ainsi $\mathfrak{S}_n$ et $N_G T/T$. Déterminer Δ et les s_α, $\alpha \in \Delta$.

c) Un drapeau complet est une suite de sous-espaces de k^n : $V_1 \leq ... \leq V_{n-1}$ tels que $\dim V_i = i$ pour tout i. On notera X l'ensemble des drapeaux complets. Soit $e_1, ..., e_n$ la base canonique de k^n. Montrer que l'application :
   $$G/B \to X,\ gB \mapsto (\langle g(e_1)\rangle, ..., \langle g(e_1), ..., g(e_{n-1})\rangle)$$
   est une bijection. Dorénavant on identifiera G/B et X.

d) On suppose que le corps k est de caractéristique p. Soit $q = p^r$ pour un certain entier $r \geq 1$. On pose $F : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n$, $(g_{i,j}) \mapsto (g_{i,j}^q)$.

   Si $w \in \mathfrak{S}_n$, on pose $\mathscr{X}(w) := \{x \bmod B\ :\ x \in G \text{ et } x^{-1}F(x) \in C(w)\}$. Montrer que $\mathscr{X}(w)$ est une sous-variété localement fermée de G/B. Si w est la permutation circulaire $(12...n)$, montrer que $\mathscr{X}(w)$ est isomorphe à la variété :
   $$\left\{ [x_1 : ... : x_n] \in \mathbb{P}^{n-1}\ :\ \begin{vmatrix} x_1 & ... & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{q^{n-1}} & ... & x_n^{q^{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0 \right\}$$

(indication : si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in k^n$*, on pose* $Fv := \begin{pmatrix} x_1^q \\ \vdots \\ x_n^q \end{pmatrix}$ *; vérifier que le drapeau complet* $V = (V_1, ..., V_{n-1})$ *est dans* $\mathscr{X}(w)$ *si et seulement s'il existe* $v \in k^n$ *tel que* $(v, ..., F^{i-1}v)$ *est une base de* V_i *pour tout* i*).*

Le groupe G redevient un groupe réductif connexe quelconque.

e) Si $w \in W$ et $\alpha \in R$, justifier que $w(\alpha) \in R$.

f) On rappelle que $R = R^+ \cup (-R^+)$. Si $\beta \in R$ on notera $\beta > 0$ si $\beta \in R^+$ et $\beta < 0$ si $\beta \in -R^+$. Si $w \in W$, on pose $R(w) := \{\alpha \in R^+ \ : \ w(\alpha) < 0\}$. Soit $\alpha \in \Delta$ une racine simple.

On rappelle (inutile de le redémontrer) que $s_\alpha(R^+ \setminus \{\alpha\}) = R^+ \setminus \{\alpha\}$. En déduire que :

$$R(ws_\alpha) = \begin{cases} s_\alpha R(w) \cup \alpha & \text{si } w(\alpha) > 0 \\ s_\alpha(R(w) \setminus \{\alpha\}) & \text{si } w(\alpha) < 0. \end{cases}$$

g) Soit $w \in W$. Soient $\alpha_1, ...\alpha_h \in \Delta$ tels que $w = s_1...s_h$ est une décomposition de longueur minimale (où $s_i := s_{\alpha_i}$ pour tout i). Montrer par récurrence sur $h \geq 1$ que

$$R(w) = \{\alpha_h, s_h\alpha_{h-1}, ..., s_h...s_2\alpha_1\} \ .$$

En déduire que $l(w) = |R(w)|$.

h) On note, pour toute racine α, $u_\alpha : \mathbb{A}^1 \to U_\alpha$ un isomorphisme de variétés tel que :

$$\forall \, t \in T, \forall \, x \in k, \, tu_\alpha(x)t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t)x) \ .$$

Pour tout i, soit n_i un relevé de $s_i = s_{\alpha_i}$ dans N_GT. Montrer que :

$$\Phi : \mathbb{A}^h \to X_w, \, (x_1, ..., x_h) \mapsto u_{\alpha_1}(x_1)n_1u_{\alpha_2}(x_2)n_2...u_{\alpha_h}(x_h)n_h \bmod B$$

est un isomorphisme de variétés *(indication : on rappelle que, quelle que soit la numérotation* $\alpha_1, ..., \alpha_r$ *des racines positives, l'application produit :* $U_{\alpha_1} \times ... \times U_{\alpha_r} \to U$, $(u_1..., u_r) \mapsto u_1...u_r$ *est un isomorphisme de variétés et que* $U \cap B^- = 1$*).* En déduire la dimension de X_w.

Quelle est la dimension de $C(w)$ dans le cas où $G = \mathrm{GL}_n$, B est le sous-groupe des matrices triangulaires, T le tore des matrices diagonales et w la permutation circulaire $(12...n)$ (vue comme élément de W) ?

i) Soit $\alpha \in \Delta$ une racine simple. On admet que pour tout $w \in W$, on a :

$$C(s_\alpha)C(w) = \begin{cases} C(s_\alpha w) & \text{si } w^{-1}(\alpha) > 0, \\ C(w) \cup C(s_\alpha w) & \text{si } w^{-1}(\alpha) < 0. \end{cases}$$

Soit P_α le sous-groupe parabolique de G engendré par B et $U_{-\alpha}$. Déduire des questions précédentes que $P_\alpha = B \cup Bs_\alpha B$, que $\dim P_\alpha = \dim B + 1$ et que $P_\alpha = \overline{C(s_\alpha)}$.

j) Soient $P \leq Q$ deux sous-groupes paraboliques de G. On suppose que $X \subseteq G$ est fermé et que $XP = X$. Montrer que XQ est fermé dans G.

k) Soit $w \in W$. Soient $\alpha_1, ...\alpha_h \in \Delta$ tels que $w = s_1...s_h$ est une décomposition de longueur minimale (où $s_i := s_{\alpha_i}$ pour tout i). On note $P_i := P_{\alpha_i}$ pour tout i ; montrer que $P_1...P_h$ est une sous-variété fermée irréductible de G *(raisonner par récurrence sur h et utiliser la question précédente).*

l) Montrer que $P_1...P_h$ est réunion de certains $C(w')$ avec $l(w') \leq l(w)$.

m) Soit $S_w := \{s_{i_1}...s_{i_m} \ : \ 1 \leq i_1 < ... < i_m \leq h\}$. Montrer que $P_1...P_h = \cup_{w' \in S_w} C(w')$.

n) Montrer que $\overline{C(w)} = \cup_{w' \in S_w} C(w')$ et que $\overline{X_w} = \cup_{w' \in S_w} X_{w'}$ *(indication : on pourra admettre que $\overline{C(s_1) \times ... \times C(s_h)} = \overline{C(s_1)} \times ... \times \overline{C(s_h)}$ dans G^h).*

En déduire que S_w est indépendant de la décomposition de longueur minimale $w = s_1...s_h$ choisie.

On démontre maintenant ce qui a été admis à la question i) :

o) Soit $w \in W$. Soit n_w un relevé de W dans $N_G T$. Soit $\alpha \in R$ une racine. On note $B_\alpha := n_w B n_w^{-1} \cap G_\alpha$. Justifier que B_α est un sous-groupe de Borel de G_α. Montrer que B_α est le stabilisateur de $n_w \bmod B \in G/B$ dans G_α.

p) Montrer que $U_\alpha \leq B_\alpha \Leftrightarrow w^{-1}(\alpha) > 0$ et que $U_{-\alpha} \leq B_\alpha \Leftrightarrow w^{-1}(\alpha) < 0$.

On suppose que α est une racine simple.

q) On suppose que $w^{-1}(\alpha) > 0$. Montrer que $n_\alpha U n_w B \subseteq C(s_\alpha w)$ *(indication : on rappelle que si on numérote $\alpha_1, ..., \alpha_r$ les racines positives, alors $U = U_{\alpha_1}...U_{\alpha_r}$ (quelle que soit la numérotation) et que $s_\alpha(R^+ \setminus \{\alpha\}) = R^+ \setminus \{\alpha\}$).* En déduire que $C(s_\alpha)C(w) = C(s_\alpha w)$.

r) On suppose que $w^{-1}(\alpha) < 0$. Montrer que $n_\alpha C(w) = U_{-\alpha} C(s_\alpha w)$. En utilisant que :

$$G_\alpha = (G_\alpha \cap B) \cup U_\alpha n_\alpha (G_\alpha \cap B)$$

(inutile de le redémontrer) montrer que $n_\alpha C(w) \subseteq C(s_\alpha w) \cup C(w)$. En déduire que $C(s_\alpha)C(w) = C(s_\alpha w) \cup C(w)$ *(on pourra admettre que $n_\alpha \in U_\alpha U_{-\alpha} U_\alpha$).*