X

Exercice 1 *a) Soit T un tore. On pose $X := \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$, $X^\vee := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$. On note additivement les produits dans X et $X^\vee$:*

$$\forall\, \chi, \chi' \in X,\ \chi + \chi' : t \mapsto \chi(t)\chi'(t)$$

$$\forall\, \nu, \nu' \in X^\vee,\ \nu + \nu' : s \mapsto \nu(s)\nu'(s)\ \ .$$

b) Si $\chi \in X$, $\nu \in X^\vee$, soit $\langle \chi, \nu \rangle \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\chi \circ \nu : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m,\ s \mapsto s^{\langle \chi, \nu \rangle}\ \ .$$

Si $T = \mathbb{G}_m^r$, on pose pour tout $r-$uplet d'entiers $a = (a_1, ...a_r)$

$$\chi_a : T \to \mathbb{G}_m,\ t = (t_1, ..., t_r) \in \mathbb{G}_m^r \mapsto t_1^{a_1} ... t_r^{a_r}$$

$$\nu_a : \mathbb{G}_m \to T,\ s \mapsto (s^{a_1}, ..., s^{a_r})\ \ .$$

Tous les éléments de X et $X^\vee$ sont de cette forme ; vérifier que :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{Z}^r,\ \langle \chi_a, \nu_b \rangle = a_1 b_1 + ... + a_r b_r\ \ .$$

c) En déduire que si $\chi_1, ..., \chi_l \in X$ sont deux à deux distincts, alors il existe un sous-groupe à un paramètre $\nu \in X^\vee$ tel que :

$$\forall\, i \neq j,\ \langle \chi_i, \nu \rangle \neq \langle \chi_j, \nu \rangle\ \ .$$

d) Soit V une représentation rationnelle de T de dimension finie. Soit Y une sous-$T-$variété fermée de $\mathbb{P}(V)$. Soient $\chi_1, ..., \chi_l \in X$ les caractères propres de T dans V. Soit $\nu \in X^\vee$ tel que :

$$\forall\, i \neq j,\ \langle \chi_i, \nu \rangle \neq \langle \chi_j, \nu \rangle\ \ .$$

Montrer que $Y^\nu = Y^T$ et en déduire que Y a au moins 2 $T-$points fixes si $\dim Y > 0$ et au moins 3 si $\dim Y > 1$.

Exercice 2 *Soit G un groupe algébrique connexe. Soit B un sous-groupe de Borel de G, soit $T \leq B$ un tore maximal. Soit $B' \geq T$ un autre sous-groupe de Borel de G. Montrer qu'il existe $n \in N_G T$ tel que $nBn^{-1} = B'$; montrer que si $nBn^{-1} = B$, alors $n \in Z_G T$. Montrer que $N_B T = N_G T \cap B = Z_G T$.*

Exercice 3 *Soit G un groupe algébrique connexe. Soit T un tore maximal de G.*

a) *Soit* $S \leq T$ *un tore central. Montrer que* $W(G,T) \simeq W(G/S, T/S)$.

b) *Soit* $\alpha \in X^*T$ *un caractère non trivial. On pose* $T_\alpha := (\ker \alpha)^0$ *et* $G_\alpha := Z_G(T_\alpha)$. *Montrer que* $W_\alpha := N_{G_\alpha}T/Z_{G_\alpha}T$ *est d'ordre au plus* 2.

c) *On suppose que* $s_\alpha \in W_\alpha$ *est d'ordre* 2. *On étend* s_α *en un endomorphisme de* $V := \mathbb{R} \otimes X$ *:*

$$r \otimes x \mapsto r \otimes s_\alpha(x)$$

que l'on note encore s_α. *Montrer que* $s_\alpha^2 = 1$ *et que* $\ker(s_\alpha - 1)$ *est un hyperplan de* V.

Exercice 4 *Soit* G *un groupe connexe non résoluble de rang* 1. *On fixe* $n \in N_GT \setminus Z_GT$ *un relevé de l'élément non trivial de* $W(G,T)$. *Soit* B *un sous-groupe de Borel de* G *contenant* T. *On pose* $U := B_u$.

a) *Montrer que :* $ntn^{-1} = t^{-1}$ *pour tout* $t \in T$ *et* $n^2 \in Z_GT$.

b) *Montrer que* G *est l'union disjointe de* B *et* UnB *;*

c) *Montrer que* $\dim U/U \cap nUn^{-1} = 1$ *;*

d) *Montrer que* $RG = (U \cap nUn^{-1})^0$.

On suppose dorénavant que G *est semisimple.*

e) *Vérifier :* $\dim U = 1$, $Z_GT = T$, $U \cap nU^{-1} = e$ *;*

f) *montrer qu'il existe un unique poids* α *de* T *dans* $\mathfrak{g}$, *tel que :*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$$

$$\mathrm{Lie}(U) = \mathfrak{g}_\alpha,\ \mathrm{Lie}(nUn^{-1}) = \mathfrak{g}_{-\alpha}\ .$$

g) *Montrer que l'application produit :* $(u,b) \mapsto unb$ *est un isomorphisme de variétés* $U \times B \to UnB = G - B$.

h) *On fixe des isomorphismes :*

$$t : \mathbb{G}_m \to T,\ x \mapsto t(x),\ u : \mathbb{G}_a \to U,\ y \mapsto u(y)\ .$$

Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\forall\, x \in \mathbb{G}_m$, $\forall y \in \mathbb{G}_a$, $t(x)u(y)t(x^{-1}) = u(x^m y)$, *montrer que* $nt(x)n^{-1} = t(x^{-1})$ *et que que* $t(\epsilon) = n^2$ *pour un certain* $\epsilon \in \{\pm 1\}$.

i) *On a un isomorphisme de variétés :*

$$\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a \to G \setminus B,\ x, y, z \mapsto u(x)nt(y)u(z)\ .$$

Montrer que $nu(y)n^{-1} \notin U$ *si* $y \neq 0$ *et en déduire :*

$$\forall\, y \neq 0,\ nu(y)n^{-1} = u(f(y))nt((g(y))u(h(y)) \tag{1}$$

pour certaines fonctions rationnelles non nulles $f, g, h \in k[y, y^{-1}]$.
En conjugant par $t(z)$ *montrer que*

$$f(z^{-m}y) = z^m f(y),\ g(z^{-m}y) = z^{-2}g(y),\ h(z^{-m}y) = z^m h(y)\ .$$

j) *En déduire :* $g(y^m) = y^2 g(1)$, $f(y) = ay^{-1}$, $h(y) = by^{-1}$ *pour certains* $a, b \in k$. *En particulier,* $m = 1$ *ou* 2.

k) *En prenant l'inverse des deux membres de (1), montrer que :* $a = b$ *et* $g(-y) = \epsilon g(y)$.

l) *Vérifier que* $a, b \neq 0$. *Quitte à changer* n *en* $nt(y_0)$ *pour un certain* y_0, *on supposera que* $a = b = -1$.

m) *Montrer que si* $m = 1$, *alors* $g(y) = cy^2$ *pour un certain* $c \in k^\times$ *et* $\epsilon = 1$ *;* *si* $m = 2$, *alors* $g(y) = cy$ *pour un certain* $c \in k^\times$ *et* $\epsilon = -1$.
On a donc :

$$(2) \qquad \forall\, y \neq 0,\ nu(y)n^{-1} = u(-y^{-1})nt(g(y))u(-y^{-1})\ .$$

n) *En remarquant que :*

$$nu(y+1)n^{-1} = nu(y)n^{-1}nu(1)n^{-1}$$

montrer que :

$$g(y)^m = y^2\ .$$

Si $m = 2$, *on a* $g(y) = \eta y$ *avec* $\eta = \pm 1$. *Quitte à remplacer* n *par* $nt(\eta)$, *on a :* $g(y) = y$.
On peut donc supposer que l'on a les relations :

$$\forall\, y \neq 0,\ nu(y)n^{-1} = u(-y^{-1})nt(y^{m'})u(-y^{-1}),\ n^2 = t((-1)^{m'})$$

$$\forall\, x, y \in \mathbb{G}_a,\ u(x+y) = u(x)u(y)$$

$$\forall\, z, w \in \mathbb{G}_m,\ t(zw) = t(z)t(w)$$

$$\forall\, z \in \mathbb{G}_m, \forall\, x \in \mathbb{G}_a,\ t(z)u(x)t(z)^{-1} = u(z^m x)$$

où $mm' = 2$.
Ces relations déterminent la structure de groupe de G.
Soit $G_1 := \mathrm{SL}_2$. *On note* T_1 *les sous-groupe des matrices diagonales de* G_1, B_1 *le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de* G_1, U_1 *le*

sous-groupe des matrices triangulaires supérieures à diagonale constante 1 de G_1 *et* n_1 *la matrice :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On a $G \setminus B_1 = U_1 n_1 B_1$ *et des isomorphismes de variétés :*

$$\begin{array}{ccccc} G_1 \setminus B_1 & \longleftarrow & \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m & \longrightarrow & G \setminus B \\ u_1(x)n_1t_1(y)u_1(z) & \longleftarrow\!\shortmid & x, y, z & \longmapsto & u(x)nt(y)u(z) \end{array}$$

où

$$u_1(x) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ t_1(y) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} .$$

Montrer que ces isomorphismes induisent un morphisme surjectif de groupes $\phi : G_1 \to G$.

o) Si $m = 2$*, montrer que* ϕ *est un isomorphisme sur l'ouvert* $U_1 n B_1$ *et donc sur tous ses translatés donc* $\mathrm{SL}_2 \simeq G$.

p) Si $m = 1$*, montrer que* $G \simeq \mathrm{PGL}_2$.