XII

Soit G un groupe réductif connexe. On fixe un tore maximal et un sous-groupe de Borel de G : $T \leq B$. On note $X := X^*T$, R, R^+

Soit $r : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation rationnelle de dimension finie ; on a une décomposition :

$$V = \oplus_{\lambda \in X} V_\lambda$$

où $V_\lambda := \{v \in V \,:\, \forall\, t \in T,\, t.v = \lambda(t)v\}$. Si $V_\lambda \neq 0$, on dit que λ est un poids de T dans V.

Exercice 1 *Soit $\alpha \in R$.*

i) *Montrer qu'il existe une base $e_1, ..., e_n$ de V telle que dans cette base les matrices de TU_α sont triangulaires supérieures et celles de T diagonales. On fixe une telle base pour la suite. On notera $(t_1, ..., t_n)$ les coefficients diagonaux de $t \in T$.*

ii) *On rappelle qu'il existe $u_\alpha : \mathbb{G}_a \to U_\alpha$ un isomorphisme tel que :*

$$\forall\, t \in T,\, \forall\, x \in k,\, tu_\alpha(x)t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t)x)\ .$$

Montrer que si $i < j$ et si $(u_\alpha)_{i,j} \neq 0$, alors il existe un coefficient $c_{i,j} \in k^\times$ tel que :

$$\forall\, x \in k,\, u_\alpha(x)_{i,j} = c_{i,j} x^{m_{i,j}}$$

pour un certain entier $m_{i,j} > 0$ vérifiant : $m_{i,j}\alpha = (t \mapsto t_i t_j^{-1})$.

iii) *Vérifier que $m_{i,j} > 0$.*

iv) *Soit χ un poids de T dans V. Montrer qu' il existe $1 \leq j \leq n$ tel que pour tout $t \in T$, $\chi(t) = t_j$. En déduire que pour tout $x \in k$, et tout $v \in V_\chi$, $u_\alpha(x)v = v \bmod \oplus_{i>0} V_{\chi + i\alpha}$.*

Exercice 2 *On suppose que V est irréductible.*

i) *Montrer que $V^U \neq 0$. Soit μ tel que $(V^U)_\mu \neq 0$. Montrer que V est engendré par $U^- v$. En déduire que si λ est un poids de T dans V, alors $\mu - \lambda$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$ de racines positives et que $\dim V_\mu = 1$. En déduire que μ est unique ; on appellera μ le plus haut poids de V.*

ii) *Montrer que $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle \geq 0$ pour toute racine positive α (indication : $s_\alpha \mu$ est un poids de T dans V).*

iii) *Soit V' une autre représentation irréductible de plus haut poids μ. Soient $v \in V$, $v' \in V'$ deux vecteurs non nuls de poids μ. Soit V'' le sous-$G-$module de $V \oplus V'$ engendré par $v \oplus v'$. Montrer que la projection sur V (respectivement V') induit un isomorphisme $V'' \simeq V$ (respectivement $V'' \simeq V'$).*

Exercice 3 *Soit $\lambda \in X$. Voici trois assertions :*

i) λ *dominant ;*

ii) $H^0(\lambda) \neq 0$ *;*

iii) *Il existe un $G-$module V tel que $(V^U)_\lambda \neq 0$.*

a) $i \Rightarrow ii$ *: si $\alpha \in R$, montrer qu'il existe $u_\alpha : \mathbb{G}_a \simeq U_\alpha$, $u_{-\alpha} : \mathbb{G}_a \to U_{-\alpha}$ tels que :*

$$\forall\, x \in k,\, \forall\, t \in T,\, tu_{\pm\alpha}(x)t^{-1} = u_{\pm\alpha}(\alpha^{\pm 1}(t)x) \ ,$$

$$\forall\, x \in k^\times,\, u_\alpha(-x^{-1})\alpha^\vee(-x^{-1})u_{-\alpha}(x^{-1}) = n_\alpha u_\alpha(x) \ ,$$

pour un certain élément n_α de $N_{G_\alpha}T \setminus Z_{G_\alpha}T$.
En déduire que $f_\lambda : UB^- \to k$, $utb \mapsto \lambda^{-1}(t)$ se prolonge à $s_\alpha UB^- \cup UB^-$ pour toute racine simple α. Montrer que $G \setminus (\cup_{\alpha\in\Delta} s_\alpha UB^-)$ est de codimension ≥ 2. Conclure.

b) $ii \Rightarrow iii$ *: déterminer $H^0(\lambda)^U$.*

c) $iii \Rightarrow i$ *: Considérer le sous-G$-$module engendré par v pour un $0 \neq v \in (V^U)_\lambda$.*