V

Exercice 1 *Soit* V *un* $k-$*espace vectoriel de dimension finie. Montrer que* $\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$, $v \mapsto [v]$ *est séparable.*

Exercice 2 *Soit* G *un groupe algébrique. On note* $\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ *et* $i : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$. *Montrer que* $d\mu_{e,e} : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(\xi, \xi') \mapsto \xi + \xi'$ *et* $di_e = -\mathrm{Id}$.

Exercice 3 *Soit* $\phi : G_1 \to G_2$ *un morphisme de groupes. Rappelons que si* G *est un groupe algébrique, si* $x \in G$, *on note* $\mathrm{Ad}(x) = d\mathrm{Int}(x)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. *Montrer que pour tout* $x_1 \in G_1$ *et tout* $\xi_1 \in \mathfrak{g}_1$, *on a :*

$$(d\phi_e)(\mathrm{Ad}(x_1)(\xi_1)) = \mathrm{Ad}(\phi(x_1))(d\phi_e(\xi_1)) \ .$$

Exercice 4 *Soit* G *un groupe algébrique connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique* $p > 0$. *Soit* q *une puissance de* p.

a) *Soit* $\sigma : G \to G$ *un morphisme de variétés. On pose* $\phi : G \to G$, $x \mapsto (\sigma x)x^{-1}$. *Montrer que* $d\phi_e = d\sigma_e - \mathrm{Id}$.

b) *Supposons que* G *est un sous-groupe fermé connexe de* GL_n. *On note* $\sigma : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n$, $(g_{i,j}) \mapsto (g_{i,j}^q)$. *On suppose que* G *est* $\sigma-$*stable.Montrer que* $\Lambda : G \to G$, $g \mapsto (\sigma g)g^{-1}$ *est surjective.*

c) *Soit* $a \in G^\sigma := \{g \in G \ : \ \sigma g = g\}$. *On note* $Z(a) := \{x \in G \ : \ xa = ax\}$. *Supposons que* $Z(a)$ *est connexe. Montrer que si* $b \in G^\sigma$ *est conjugué à* a *dans* G, *alors* b *et* a *sont conjugués dans le groupe fini* G^σ.

Exercice 5 *On note* $\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$ *les fonctions coordonnées dans* $k[\mathrm{SL}_2]$. *On note* PSL_2 *le groupe algébrique tel que* $k[\mathrm{PSL}_2] = k[T_iT_j \ : \ 1 \leq i, j \leq 4]$. *Soit* $\phi : \mathrm{SL}_2 \to \mathrm{PSL}_2$ *le morphisme de groupes algébriques induit.*

Montrer que $d\phi_e$ *est bijective en caractéristique* $\neq 2$ *et déterminer* $d\phi_e$ *en caractéristique* 2.

Exercice 6 *Soit* G *un groupe algébrique. Soit* X *une* $G-$*variété homogène.*

a) *Montrer que chaque composante irréductible de* X *est homogène pour* G^0.

b) *Montrer que les composantes de* X *sont ouvertes et fermées et que leur union est une union disjointe.*

c) *En déduire que si* H *est un sous-groupe fermé de* G, *alors* G/H *est un e variété quasiprojective.*

Exercice 7 *Soit G un groupe algébrique. On suppose que H est un sous-groupe fermé distingué de G.*

a) *Montrer que $G/H \times G/H \to G/H$, $x_1H, x_2H \mapsto x_1x_2H$ et $G/H \to G/H$, $xH \mapsto x^{-1}H$ sont des morphismes de variétés.*

b) *Soit $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation rationnelle de dimension finie, soit $0 \neq v \in V$ tels que :*

$$H = \{g \in G \ : \ gv \in k^\times v\}$$

$$\mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{g} \ : \ d\phi(\xi)v \in kv\} \ .$$

On pose, pour tout caractère $\chi \in X^*(H)$:

$$V_\chi := \{x \in V \ : \ \forall\, h \in H,\, \phi(h)x = \chi(h)x\} \ .$$

Vérifier que les V_χ sont en somme directe et que G laisse stable $\oplus_\chi V_\chi$. On peut donc supposer que $V = \oplus_\chi V_\chi$.

c) *Soit W l'espace des $k-$endomorphismes de V qui laissent stables chaque V_χ. On pose pour tout $g \in G$ et tout $f \in W$:*

$$\psi(g)f = \phi(g)f\phi(g^{-1}) \ .$$

On a bien un morphisme : $\psi : G \to \mathrm{GL}(W)$. Vérifier que $\ker\psi \subseteq H$. En déduire un morphisme : $\lambda : G/H \to \mathrm{GL}(W)$.

d) *Montrer que le morphisme obtenu ci-dessus λ est d'image fermée dans $\mathrm{GL}(W)$.*

e) *Montrer que $\ker d\psi_e \subseteq \mathfrak{h}$. En déduire que λ est birationnelle et bijective sur son image.*

f) *En déduire que λ est un isomorphisme sur son image et que G/H est un groupe algébrique affine.*