IX

Exercice 1 *Soit* $G \subseteq \mathrm{GL}_n$ *un sous-groupe fermé. Soit* B *un sous-groupe résoluble connexe de* G *de dimension maximale. On suppose que* B *est le stabilisateur d'une droite* $V_1 \leq k^n$.

a) *Montrer qu'il existe un drapeau complet* $\mathrm{d} = (V_1 \leq V_2 \leq ... \leq V_{n-1})$ *laissé stable par* B *(utiliser le théorème de Lie-Kolchin).*

b) *Dans la variété* $\mathscr{V}$ *des drapeaux complets, montrer que l'orbite de* G *est de dimension minimale donc fermée (considérer la dimension des groupes d'isotropie).*

c) *En déduire que* G/B *est une variété projective et que tous les sous-groupes de Borel de* G *sont conjugués.*

Exercice 2 *Soit* G *un groupe algébrique linéaire. Soit* T *un sous-tore fermé de* G. *Montrer qu'il existe* $t \in T$ *tel que* $Z_G T = Z_G t$ *indication : soit* $(\chi_1, ..., \chi_r$ *une* $\mathbb{Z}-$*base de* X^*T *; choisir* t *tel que les* $\chi_i t$ *soient deux à deux distincts.*

Exercice 3 *Soit* $H \leq G$ *un sous-groupe fermé d'un groupe algébrique linéaire.*

On pose :

$$X := \{(xH, y) \in G/H \times G : x^{-1}yx \in H\} \text{ et } \widetilde{X} := \{(x, y) \in G \times G : x^{-1}yx \in H\}.$$

a) *Montrer que* $\widetilde{X}$ *est fermé dans* $G \times G$ *et isomorphe à* $G \times H$.

b) *En considérant le morphisme* $G \times G \to G/H \times G$, $(g_1, g_2) \mapsto (g_1 H, g_2)$ *(qui est ouvert) montrer que* X *est fermé dans* $G/H \times G$ *et que* $\dim X = \dim G$.

c) *On considère la projection sur la deuxième composante :* $\pi : X \to G$. *Montrer que* $\pi X = \cup_{x \in G} x H x^{-1}$.

Exercice 4 *Soit* G *un groupe connexe.*

a) *Montrer que si* $\mathrm{rang} G = 0$ *alors* G *est unipotent.*

b) *Montrer que si tous les éléments de* G *sont semisimples, alors* G *est un tore (commencer par le cas résoluble puis utiliser qu'un Borel nilpotent est forcément égal à* G*).*

c) *Montrer que si* $\dim G \leq 2$, *alors* G *est résoluble (indication : soit* B *un Borel de* G, *si* $B < G$, *alors* B *est nilpotent ...)*

d) *Si* G *a un seul tore maximal, alors* G *est nilpotent (commencer par le cas résoluble).*

Exercice 5 *Soient* $G = \mathrm{GL}_n$ *et* $B = B_n$.

a) *Si* $n = 2$, *montrer que* G *et* B *sont les seuls sous-groupes paraboliques contenant* B *(on rappelle que* G *est engendré par les matrices diagonales et les matrices de transvection :*$T_{i,j}(t) = I + tE_{i,j}$, $i \neq j$*).*

b) *Si* $n = 3$ *soient*

$$P_1 := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\} \text{ et } P_2 := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in G \right\} .$$

Vérifier que P_1 *et* P_2 *sont connexes et égaux à leur normalisateur. Soit* P *un sous-groupe parabolique de* G *contenant* B, *montrer que* $P = B, P_1, P_2$ *ou* P_3 *(indication : vérifier que si* $g \in P$ *a un coefficient* $g_{3,1} \neq 0$, *alors* $P = G$ *puis que si* $g_{2,1} \neq 0$, *alors* $P \supseteq P_1$ *...)*

Exercice 6 *Soit* $G = \mathrm{GL}_n$. *Soit* T *le sous-groupe des matrices diagonales de* G. *Montrer que* T *est un tore maximal et que* $Z_G T = T$. *Soit* N *le groupe des matrices monomiales. Vérifier que* $N = N_G T$ *et que* $N/T \simeq \mathfrak{S}_n$. *Montrer que* $T \cap \mathrm{SL}_n$ *est un tore maximal de normalisateur* $N \cap \mathrm{SL}_n$ *et que* $N \cap \mathrm{SL}_n / T \cap \mathrm{SL}_n \simeq \mathfrak{S}_n$. *Si* $\sigma \in N$ *est la matrice :* $(\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$, *si* $t \in T$ *est la matrice diagonale* $(t_1, ..., t_n)$, *calculer* $\sigma t \sigma^{-1}$.
Soit $G = \mathrm{Sp}_{2m} = \{g \in \mathrm{GL}_{2m} \ : \ {}^t g J g = J\}$ *où* J *est la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$. *Soit* T *le sous-groupe des matrices diagonales de la forme :*

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & x_m & & & \\ & & & x_1^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & x_m^{-1} \end{pmatrix} .$$

Montrer que $Z_G T = T$ *et en déduire que* T *est un tore maximal de* G. *Montrer que le groupe de Weyl est isomorphe à* $W = \mathfrak{S}_m \ltimes \{\pm 1\}^m$. *Décrire l'action de* W *sur* $T \simeq \mathbb{G}_m^m$.

a) *Si* $G = \mathrm{SO}_{2m+1}$ *(on suppose* k *de caractéristique* $\neq 2$*).*

Exercice 7 *a) Soit* $V = k^{2m}$*. On définit une forme alternée non dégénérée sur* V *par :*

$$\forall\, x, y \in V,\ (x, y) = \sum_{i=1}^{m}(x_i y_{m+i} - x_{m+i} y_i)\ .$$

Soit $G := \mathrm{Sp}_{2m} := \{g \in \mathrm{GL}_{2m}\ :\ \forall\, x, y \in V,\ (gx, gy) = (x, y)\}$*. On dit qu'un sous-espace* $W \leq V$ *est totalement isotrope si* $(x, y) = 0$ *pour tous* $x, y \in W$*. Vérifier qu'un tel sous-espace est de dimension* $\leq m$*.*

Montrer que l'ensemble des sous-espaces isotropes de dimension i*,* $1 \leq i \leq m$*, est fermé dans* $G_{i,n}$*. Montrer aussi que* G *agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux isotropes complets* $V_1 \leq ... \leq V_m$*. En déduire que les sous-groupes de Borel de* G *sont les stabilisateurs des drapeaux isotropes complets* $V_1 \leq ... \leq V_m$ *(*i.e. *pour tout* i*,* V_i *est un sous-espace totalement isotrope de dimension* i*) indication : si* $V_1 \leq ... \leq V_m$ *est un drapeau isotrope complet, alors* $V_1 \leq .... \leq V_m \leq V_{m-1}^{\perp} \leq ... \leq V_1^{\perp}$ *est un drapeau complet . En déduire que* $\mathrm{Sp}_{2m} \cap B_{2m}$ *est un sous-groupe de Borel.*

b) Soit $V = k^n$*. On définit la forme quadratique non dégénérée :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i x_{m+i} \ \text{ si } n = 2m$$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i x_{m+i} + \frac{x_n^2}{2} \ \text{ si } n = 2m + 1.$$

Si G *est le sous-groupe de* SL_n *qui préserve* q *(donc* $G \simeq \mathrm{SO}_n$*), alors montrer que les sous-groupes de Borel de* G *sont les stabilisateurs des drapeaux isotropes complets et que* $B_n \cap G$ *est un sous-groupe de Borel de* G *et que les sous-groupes de Borel de* G *sont les stabilisateurs des drapeaux isotropes complets. (en caractéristique* $\neq 2$*)*