Math-IV-algèbre
Formes (bi)linéaires

Alexis Tchoudjem

Université Lyon I

31 mai 2011

Dans ce cours $\mathbb{K}$ est un corps qui peut être $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Autres notations : Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $v_1, ..., v_n$ sont des vecteurs de E, on notera :

$$\langle v_1, ..., v_n \rangle$$

le sous-espace vectoriel de E engendré par $v_1, ..., v_n$ *c-à-d* le sous-espace des combinaisons linéaires

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

où $\lambda_1, ..., \lambda \in \mathbb{K}$.

Table des matières

Chapitre 1

Quotients

1.1 Sommes directes

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soient F_1, F_2 deux sous-espaces de E.

On dit que E est la *somme directe* de F_1 et F_2 ou que F_2 est un *supplémentaire* de F_1 dans E si :

$$i)E = F_1 + F_2 \text{ et } ii)F_1 \cap F_2 = 0$$

notation :

$$E = F_1 \oplus F_2 \ .$$

Exemple :

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$$

Proposition 1.1.1 *Si $E = F_1 \oplus F_2$ et si E est de dimension finie, alors :*

$$\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$$

Proposition 1.1.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace de E. Alors F admet un supplémentaire dans E.*

Démonstration : Soit $e_1, ..., e_r$ une base de F. C'est une famille libre donc, on peut la compléter en une base $e_1, ..., e_r, ..., e_n$ de E. Posons $G := \langle e_{r+1}, ..., e_n \rangle$. On a : $E = F \oplus G$. *q.e.d.*

Corollaire 1.1.2.1 *Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace E de dimension finie, alors :*

$$\dim F \leq \dim E$$

de plus, $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $E = F$.

Théorème 1.1.3 *Soient F, G deux sous-espaces d'un même espace vectoriel E de dimension finie. Alors :*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \ .$$

EXEMPLE : Soient P_1, P_2 deux plans distincts de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui passent par 0. Alors $P_1 \cap P_2$ est une droite.
Démonstration : Soient F', G' tels que :

$$F = F' \oplus (F \cap G) \text{ et } G = (F \cap G) \oplus G' \ .$$

Alors :

$$F + G = F \oplus G'$$

$$\Rightarrow \dim(F+G) = \dim F + \dim G' = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \ .$$

q.e.d.

Soient $F_1, ..., F_n$ des sous-espaces de E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel. On dit que E est la somme directe des F_i si tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + ... + x_n$ avec chaque $x_i \in F_i$.

Autrement dit si :

$$i) E = F_1 + ... + F_n$$

et

$$ii) \forall\, x_1 \in F_1, ..., \forall\, x_n \in F_n,\ x_1 + ... + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = ... = x_n = 0$$

notation : $E = F_1 \oplus ... \oplus F_n$.

Exercice 1

$$\dim(F_1 \oplus ... \oplus F_n) = \dim F_1 + ... + \dim F_n$$

Exercice 2 Soient F_1, F_2, F_3 trois sous-espaces d'un même espace vectoriel E de dimension finie. Alors,

$$\dim(F_1 + F_2 + F_3) =$$

$$\dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3$$

$$-\dim(F_1 \cap F_2) - \dim(F_2 \cap F_3) - \dim(F_1 \cap F_3)$$

$$+\dim(F_1 \cap F_2 \cap F_3) \ .$$

1.2 Quotients

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit F un sous-espace de E. Pour tout $x \in E$, on note $x + F$ l'ensemble des éléments de la forme $x + y$ où $y \in F$.

Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$, si $F = D$ est une droite passant par 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x + D$ est la droite parallèle à D passant par x.

L'ensemble des

$$x + F \ : \ x \in E$$

est noté E/F.
Remarque : $0 + F = F$.

Proposition 1.2.1 *Soient $x, x' \in E$. Alors, $x + F = x' + F \Leftrightarrow x - x' \in F$.*

En particulier, pour tout $y \in F$, $x + F = (x + y) + F$.
Remarque : On écrit aussi $x = x' \bmod F$ à la place de $x + F = x' + F$.

On définit une addition et une multiplication par les scalaires sur E/F par :

$$i)\forall\, x, y \in E,\ (x + F) + (y + F) := (x + y) + F$$

$$ii)\forall\, t \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E,\ t.(x + F) := tx + F \ .$$

Proposition 1.2.2 *Cette addition et cette multiplication sont bien définies. Avec cette addition et cette multiplication, E/F est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel abstrait, c'est le « quotient de E par F » .*

Démonstration : Il s'agit de montrer que si $x+F = x'+F$ et $y+F = y'+F$, alors : $(x + y) + F = (x' + y') + F$. Puis que si $x + F = x' + F$, alors pour tout $t \in \mathbb{K}$, $tx + F = tx' + F$. Maintenant il est facile de vérifier les axiomes de définition d'un espace-vectoriel. *q.e.d.*

Remarque : Le neutre (ou le zéro) de E/F est $0_{E/F} = 0 + F = F$.

Si E/F est de dimension finie d, on dit que F est de *codimension* d dans E. Notation : $\mathrm{codim}(F, E)$.

Proposition 1.2.3 *Soit $\pi : E \to E/F$ l'application : $x \mapsto x + F$. C'est la projection canonique de E sur E/F. L'application π est linéaire surjective et son noyau est :*

$$\ker \pi = F \ .$$

En pratique, on représente les éléments de E/F par un supplémentaire de F dans E plutôt que par l'ensemble des classes modulo F. En effet :

Proposition 1.2.4 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit F un sous-espace de E. Alors si S est un supplémentaire de F dans E, c-à-d $F \oplus S = E$, la restriction de π à S :*

$$\pi' : S \to E/F \; x \mapsto x + F$$

est un isomorphisme. En particulier, F est de codimension finie si et seulement si F admet un supplémentaire de dimension finie. Et dans ce cas tous les supplémentaires S de F dans E sont de dimension : $\dim S = \mathrm{codim}_E(F)$.

Démonstration : Injectivité : $\ker \pi' = \ker \pi \cap S = F \cap S = 0$.

Surjectivité : si $x+F \in E/F$, il existe $x_1 \in F, x_2 \in S$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors : $x + F = x_2 + F = \pi'(x_2)$. *q.e.d.*

Corollaire 1.2.4.1 *Si E est de dimension finie et si F est un sous-espace de E, alors :* $\dim E - \dim F = \mathrm{codim}(F, E)$.

« Il y a une infinité de supplémentaires (tous isomorphes) alors qu'il n'y a qu'un seul quotient. Donc utiliser le quotient évite de faire un choix particulier. »

Proposition 1.2.5 *Soit $\varphi : E \to E''$ une application linéaire surjective. Alors, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels :*

$$\overline{\varphi} : E/\ker\varphi \overset{\cong}{\to} E''$$

défini par : $x + \ker\varphi \mapsto \varphi(x)$.

Démonstration : L'apllication de l'énoncé est bien définie et est bien linéaire. Elle est surjective car si $y \in E''$, il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) = y$ donc : $\overline{\varphi}(x + \ker\varphi) = y$. Elle est injective car :

$$x + \ker\varphi \in \ker\overline{\varphi} \Leftrightarrow \overline{\varphi}(x + \ker\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker\varphi \Leftrightarrow x = 0 \bmod \ker\varphi \;.$$

q.e.d.

On en déduit le célèbre théorème du rang :

Théorème 1.2.6 (théorème du rang) *Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie. Si $\varphi : E \to F$ est une application linéaire, alors :* $\dim E = \mathrm{rang}\,(\varphi) + \dim\ker\varphi$.

(On rappelle que le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

Corollaire 1.2.6.1 *Si E est de dimension finie et si $\varphi : E \to E$ est une application linéaire, alors :*
φ *injective* $\Leftrightarrow \varphi$ *surjective* $\Leftrightarrow \varphi$ *bijective.*

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Proposition 1.2.7 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de codimensions finies. Alors $F+G$ et $F\cap G$ sont aussi de codimension finie et :*
$$\mathrm{codim}(F\cap G) = \mathrm{codim}(F) + \mathrm{codim}(G) - \mathrm{codim}(F+G) \ .$$

Démonstration : On considère l'application linéaire :
$$\varphi :\ E/F \times E/G \to E/(F+G)$$
$$(x \bmod F, y \bmod G) \mapsto x - y \bmod (F+G) \ .$$

C'est une application surjective et son noyau est isomorphe à $E/(F\cap G)$ par l'isomorphisme :
$$E/(F\cap G) \to \ker\varphi$$
$$x \bmod (F\cap G) \mapsto (x \bmod F, x \bmod G) \ .$$

q.e.d.

Exercice 3 Soient $E \supseteq F \supseteq G$ trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. On suppose que G est de codimension fine dans E. Montrer que $E/G \to E/F$, $x \bmod G \mapsto x \bmod F$ est linéaire surjective et que son noyau est isomorphe à F/G. En déduire que
$$\mathrm{codim}_E G = \mathrm{codim}_E F + \mathrm{codim}_F G$$
puis que $\mathrm{codim}_E(F) \leq \mathrm{codim}_E(G)$ avec égalité si et seulement si $F = G$.

À retenir : si E est de dimension finie, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a :
$$\dim(E/F) + \dim F = \dim E \ .$$

Proposition 1.2.8 *Si F est un sous-espace de E, alors :*
$$\mathrm{codim}_E(F) = 0 \Leftrightarrow \dim(E/F) = 0 \Leftrightarrow E/F = 0 \Leftrightarrow E = F \ .$$

Démonstration : Si $E/F = 0$, alors la surjection canonique : $E \to E/F$ est nulle donc son noyau F est tout E donc $F = E$. *q.e.d.*

Chapitre 2

Formes linéaires

Soit E un $\mathbb{K}-$espace-vectoriel.

2.1 Définition

Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire :$\lambda : E \to \mathbb{K}$.

EXEMPLE : Si $E = \mathbb{K}[X]$ est l'espace des polynômes, alors : $P \mapsto P(0)$ et $P \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)dt$ sont des exemples de formes linéaires.

Soient λ, λ' deux formes linéaires sur E et $t \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda + t\lambda'$ est aussi une forme linéaire. L'espace des formes linéaires sur E est donc un espace vectoriel. On le note : E^*.

Notation : Soient $\lambda \in E^*$, $x \in E$, on note parfois $\langle \lambda, x \rangle := \lambda(x) \in \mathbb{K}$.

Exemple important : les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$:

Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$. L'application :

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$. Toutes les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont de cette forme. En effet, notons $e_1, ..., e_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Si λ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$, alors pour tout $x_1, ..., x_n \in K$, on a :

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\lambda(e_1) + ... + x_n\lambda(e_n) \ .$$

2.2 Base duale

Supposons que E est de dimension finie.

Soit $e_1, ..., e_n$ une base de E. Pour tout $1 \leq i \leq n$ on définit la forme linéaire coordonnée d'indice i par :

$$e_i^*(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_i \ .$$

Théorème 2.2.1 *Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors la famille $\mathscr{B}^* := (e_1^*, ..., e_n^*)$ est une base du dual E^* ; c'est la base duale de $\mathscr{B}$. En particulier,* $\dim E^* = \dim E$. *De plus, pour tout $\lambda \in E^*$, on a :*

$$\lambda = \langle \lambda, e_1 \rangle e_1^* + ... + \langle \lambda, e_n \rangle e_n^*$$

et pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i^*, x \rangle e_i \ .$$

Exercice 4 Vérifier que si E est l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $\leq n$, la base

$$1, ..., \frac{X^n}{n!}$$

a pour base duale :

$$\lambda_0, ..., \lambda_n$$

où $\lambda_i : P(X) \mapsto P^{(i)}(0)$.

2.3 Bidual

On appelle *bidual* de E le dual du dual de E, noté E^{**}.

Théorème 2.3.1 *Si $x \in E$, on note $\widehat{x} : E^* \to \mathbb{K}$, $\lambda \mapsto \lambda(x)$. On a $\widehat{x} \in E^{**}$. De plus, si E est de dimension finie, alors :*

$$E \to E^{**}$$

$$x \mapsto \widehat{x}$$

est un isomorphisme.

Lemme 2.3.2 *Soit $0 \neq x \in E$, alors, il existe $\lambda \in E^*$ tel que $\lambda(x) \neq 0$.*

2.3.1 Base antéduale

Proposition 2.3.3 *Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une base de E^*. Alors il existe une seule base $(v_1, ..., v_n)$ de E telle que pour tout i, $\lambda_i = v_i^*$. On dit que $(v_1, ..., v_n)$ est la base antéduale de $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.*

Démonstration :

Comme $E \to E^{**}$, $x \mapsto \widehat{x}$ est injective, E est forcément de dimension finie. Soit $(\lambda_1^*, ..., \lambda_n^*)$ la base duale de $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ dans E^{**}. D'après le théorème 2.3.1, il existe, pour tout i, $v_i \in E$ tel que $\widehat{v_i} = \lambda_i^*$. Il est facile de vérifier que $(v_1, ..., v_n)$ est la base antéduale de $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

q.e.d.

Calcul pratique : Soit $E = \mathbb{K}^n$. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une base de E^*. Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de E. Soit B la matrice :

$$B := (\langle \lambda_i, e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n} \; .$$

Alors, la base antéduale de $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est donnée par les colonnes de la matrice B^{-1}.

Proposition 2.3.4 *Soit F un sous-espace de E. La restriction :*

$$E^* \to F^*, \; \lambda \mapsto \lambda|_F$$

est surjective. Son noyau est l'orthogonal de F.

2.4 Orthogonalité

On dit que $\lambda \in E^*$ et $x \in E$ sont *orthogonaux* si $\langle \lambda, x \rangle = \lambda(x) = 0$.

Si V est un sous-espace de E, on note

$$V^\perp := \{\lambda \in E^* \, : \, \forall \, x \in V, \, \langle \lambda, x \rangle = 0\}$$

c'est un sous-espace vectoriel de E^* *(exo)*, appelé *l'orthogonal* de V. Si W est un sous-espace de E^*, on note :

$$W^\circ := \{x \in E \, : \, \forall \, \lambda \in W, \, \langle \lambda, x \rangle = 0\}$$

c'est un sous-espace vectoriel de E *(exo)*, appelé *l'orthogonal* de W.

Remarque importante : Si V est engendré par les vecteurs $v_1, ..., v_n$, alors :

$$V^\perp = \{\lambda \in E^* \, : \, \langle \lambda, v_1 \rangle = ... = \langle \lambda, v_n \rangle = 0\}$$

de même si W est engendré par les formes linéaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$, alors :

$$W^\circ = \{x \in E \, : \, \langle \lambda_1, x \rangle = \langle \lambda_n, x \rangle = 0\} \; .$$

« L'orthogonal renverse les inclusions » :

Proposition 2.4.1 *i) Si $V_1 \subseteq V_2 \subseteq E$ sont des sous-espaces de E, alors $V_2^\perp \subseteq V_1^\perp$.*

ii) Si $W_1 \subseteq W_2 \subseteq E$ sont des sous-espaces de E^*, alors $W_2^\circ \subseteq W_1^\circ$.

iii) $\{0_E\}^\perp = E^*$, $E^\perp = \{0_{E^*}\}$.

iv) $\{0_{E^*}\}^\circ = E$, $E^{*\circ} = \{0_E\}$.

Théorème 2.4.2 *Si E est de dimension finie, alors : i) Pour tout V sous-espace de E,* $\dim V + \dim V^{\perp} = \dim E$ *et* $V^{\perp\circ} = V$. *ii) Pour tout W sous-espace de E^*,* $\dim W + \dim W^{\circ} = \dim E$ *et* $W^{\circ\perp} = W$.

Rem : l'égalité $V^{\perp\circ} = V$ reste vraie en dimension infinie mais non l'égalité $W^{\circ\perp} = W$.

Démonstration : i) Soit $\pi : E \to E/V$. Alors on a un isomorphisme :

$$(E/V)^* \to V^{\perp},\ \lambda \mapsto \lambda \circ \pi\ .$$

ii) L'application restriction :

$$E^{**} \to W^*$$

est surjective. Donc : $E \to W^*$, $x \mapsto \widehat{x}|_W$ est aussi surjective. Son noyau est exactement W°. D'après le théorème du rang, on a donc : $\dim W^{\circ} = \dim E - \dim W$. *q.e.d.*

Exercice 5 Vérifier que l'on a toujours :

$$V \subseteq V^{\perp\circ}\,,\ W \subseteq W^{\circ\perp}\,,\ V^{\perp} = V^{\perp\circ\perp}\,,\ W^{\circ} = W^{\circ\perp\circ}$$

pour tous sous-espaces V de E et W de E^*.

Proposition 2.4.3 *Si F est un sous-espace de E, alors $F = E \Leftrightarrow F^{\perp} = 0$.*

Démonstration : Soit $\pi : E \to E/F$ la surjection canonique. Si $F^{\perp} = 0$ alors, pour tout $\mu \in (E/F)^*$, $\mu \circ \pi \in F^{\perp}$ donc $\mu \circ \pi = 0$. Donc, pour tout $x \in E$, $\langle \mu, \pi(x) \rangle = 0$, pour tout $\mu \in (E/F)^*$. Donc $\pi(x) = 0$ *i.e.* $x \in F$ pour tout $x \in E$. *q.e.d.*

Corollaire 2.4.3.1 (Équations des sous-espaces en dimension finie) *Si E est de dimension n alors :*

i) Si $\lambda_1, ..., \lambda_p \in E^*$ sont des formes linéaires telles que $\dim\langle \lambda_1, ..., \lambda_p \rangle = r$ *alors : le sous-espace*

$$F := \{x \in E\ :\ \forall\, i,\ \langle \lambda_i, x \rangle = 0\}$$

est de dimension $n - r$.

ii) Réciproquement, si F est un sous-espace de E de dimension q, il existe $n - q$ formes linéaires linéairement indépendantes $\lambda_1, ..., \lambda_{n-q}$ telles que :

$$F = \{x \in E\ :\ \forall\, 1 \le i \le n - q,\ \langle \lambda_i, x \rangle = 0\}\ .$$

Proposition 2.4.4 *On suppose E de dimension finie. Soient V_1, V_2 deux sous-espaces de E. Alors : i) $(V_1+V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$, ii) $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$.*

Soient W_1, W_2 deux sous-espaces de E^*. Alors : i) $(W_1 + W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ$, ii) $(W_1 \cap W_2)^\circ = W_1^\circ + W_2^\circ$.

Démonstration :

i) : $V_1 \subseteq V_1 + V_2 \Rightarrow (V_1 + V_2)^\perp \subseteq V_1^\perp$. De même : $(V_1 + V_2)^\perp \subseteq V_2^\perp$. Donc $(V_1 + V_2)^\perp \subseteq V_1^\perp \cap V_2^\perp$. Pour la réciproque, soit $\lambda \in V_1^\perp \cap V_2^\perp$. Alors, $\forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2$, $\langle \lambda, v_1 + v_2 \rangle = \langle \lambda, v_1 \rangle + \langle \lambda, v_2 \rangle = 0$. Donc, $\lambda \in (V_1 + V_2)^\perp$.

Démontrons ii) :

$V_1 \cap V_2 \subseteq V_1 \Rightarrow V_1^\perp \subseteq (V_1 \cap V_2)^\perp$. De même, $V_2^\perp \subseteq (V_1 \cap V_2)^\perp$ donc : $(V_1 \cap V_2)^\perp \supseteq V_1^\perp + V_2^\perp$. Pour montrer l'égalité, nous allons comparer les dimensions :

$$\begin{aligned}
\dim (V_1 \cap V_2)^\perp &= \dim E - \dim (V_1 \cap V_2) \\
&= \dim E - (\dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 + V_2) \\
&= \dim E - \dim V_1 + \dim E - \dim V_2 - (\dim E - \dim (V_1 + V_2)) \\
&= \dim V_1^\perp + \dim V_2^\perp - \dim (V_1 + V_2)^\perp \\
&= \dim V_1^\perp + \dim V_2^\perp - \dim (V_1^\perp \cap V_2^\perp) \\
&= \dim (V_1^\perp + V_2^\perp) \ .
\end{aligned}$$

De même pour iii) et iv). *q.e.d.*

2.5 Transposée

Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces-vectoriels. Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Pour tout $\lambda \in F^*$, $\lambda \circ u \in E^*$. L'application : ${}^t u : F^* \to E^*$, $\lambda \mapsto \lambda \circ u$ est linéaire ; c'est la *transposée* de u.

Proposition 2.5.1 *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces-vectoriels de dimension finie. Alors :*

i) $\operatorname{rang} u = \operatorname{rang} {}^t u$, *ii)* $\operatorname{Im} ({}^t u) = (\ker u)^\perp$, *iii)* $\ker ({}^t u) = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

Démonstration : iii) : Soit $\lambda \in F^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \ker {}^t u &\Leftrightarrow {}^t u(\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda \circ u = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall\, x \in E,\ \lambda(u(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall\, y \in \operatorname{Im} u, \lambda(y) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in (\operatorname{Im} u)^\perp \ .
\end{aligned}$$

ii) : Soit $\lambda \in F^*$. Alors :

$$\forall\, x \in \ker u,\ {}^t u(\lambda)(x) = \lambda(u(x)) = \lambda(0) = 0 \ .$$

Donc Im $({}^t u) \subseteq (\ker u)^\perp$.

Réciproquement, si $\mu \in (\ker u)^\perp$, alors : $\forall\, x \in \ker u$, $\mu(x) = 0$. Soit S un supplémentaire de Im u dans F : $\mathrm{Im}\, u \oplus S = F$. On pose :

$$\lambda(u(x) + s) := \mu(x)$$

pour tout $x \in E$ et tout $s \in S$. L'application $\lambda : F \to \mathbb{K}$ est bien définie car si $x, x' \in E$, $s, s' \in S$, alors :

$$\begin{aligned} u(x) + s = u(x') + s' &\Rightarrow u(x) = u(x') \\ &\Rightarrow x - x' \in \ker u \\ &\Rightarrow \mu(x - x') = 0 \Rightarrow \mu(x) = \mu(x') \ . \end{aligned}$$

De plus λ est linéaire *i.e.* $\lambda \in F^*$. On a donc $\mu = {}^t u(\lambda) \in \mathrm{Im}\, ({}^t u)$.

i) : $\mathrm{rang}\, ({}^t u) = \dim \mathrm{Im}\, {}^t u = \dim(\ker u)^\perp = \dim E - \dim \ker u = \mathrm{rang}\, u$, d'après le théorème du rang. *q.e.d.*

Proposition 2.5.2 *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soient : $u : E \to F$, $v : F \to G$ deux applications linéaires. Alors ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.*

Proposition 2.5.3 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme. Un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.*

Démonstration : Supposons que F est stable par u, *i.e.* : $\forall\, x \in F$, $u(x) \in F$. Si $\lambda \in F^\perp$, alors :

$$\forall\, x \in F,\ \langle {}^t u(\lambda), x\rangle = \langle \lambda \circ u, x\rangle = \lambda(u(x)) = 0 \ .$$

Donc ${}^t u(\lambda) \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Réciproquement, supposons que $F^\perp$ est stable par ${}^t u$. Soit $\pi : E \to E/F$ la surjection canonique. Soit $\lambda \in (E/F)^*$.

Pour tout $x \in F$, $\langle \lambda, u(x) \bmod F\rangle = (\lambda \circ \pi)(u(x)) = ({}^t u(\lambda \circ \pi))(x)$.

Or, $\lambda \circ \pi \in F^\perp$ donc ${}^t u(\lambda \circ \pi) \in F^\perp$. Donc : $\langle \lambda, u(x) \bmod F\rangle = 0$. Cela est vrai pour tout $\lambda \in (E/F)^*$ donc $u(x) \bmod F = 0 \bmod F$ *i.e.* : $u(x) \in F$ pour tout $x \in F$. *q.e.d.*

Matrices

Proposition 2.5.4 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de base $(e_1, ..., e_m)$ et F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de base $B' = (f_1, ..., f_n)$. Soit $u : E \to F$ linéaire. Notons A la matrice :*

$$A := [u]_{B,B'}$$

alors : $[{}^t u]_{B'^*,B^*} = {}^t A$.

2.6 Hyperplans

Un *hyperplan* de E est un sous-espace H de codimension 1.

Exemple : Si $E = \mathbb{K}[X]$, alors les polynômes divisibles par X forment un hyperplan.

On a une bijection entre les hyperplans de E et les formes linéaires non nulles sur E, à homothétie près :

Proposition 2.6.1 *i) Soit $\lambda \in E^*$ une forme linéaire* **non nulle***. Alors,* $\ker \lambda$ *est un hyperplan de E. Réciproque :*

ii) Si H est un hyperplan de E, alors il existe $\lambda \in E^*$ telle que $\ker \lambda = H$. *Enfin,*

iii) Si $\lambda, \lambda' \in E^*$,

$$\ker \lambda = \ker \lambda' \Leftrightarrow \exists\, 0 \neq c \in \mathbb{K},\ \lambda = c\lambda' \ .$$

Chapitre 3

Formes bilinéaires

Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. On dit qu'une application

$$B : E \times F \to \mathbb{K}$$

est une *forme bilinéaire* si :

$$\forall\, x, x' \in E,\, \forall\, y, y' \in F,\, \forall\, t, t' \in \mathbb{K},\; B(tx + t'x', y) = tB(x, y) + t'B(x', y)$$
$$B(x, ty + t'y') = tB(x, y) + t'B(x, y') \ .$$

3.1 Matrice d'une forme bilinéaire

En dimension finie, si $e := (e_1, ..., e_m)$ est une base de E et $f := (f_1, ..., f_n)$ est une base de F, on note

$$A := \mathrm{Mat}_{e,f}(B) := (B(e_i, f_j))_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

c'est la matrice de B dans les bases e, f.

Si $x = x_1e_1 + ... + x_me_m \in E$ et $y = y_1f_1 + ... + y_nf_n$, on a :

$$B(x, y) = \sum_{i,j} x_i B(e_i, e_j) y_j$$
$$= {}^t x A y \ .$$

Réciproquement, si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est une matrice, alors les égalités ci-dessus définissent une forme bilinéaire sur $E \times F$.

Si on note $\mathrm{Bil}(E, F)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$, $\mathrm{Bil}(E, F)$ est un espace vectoriel pour les opérations suivantes :

$$(B + B')(x, y) := B(x, y) + B'(x, y) \text{ et } (tB)(x, y) := tB(x, y)$$

et si e, f sont des bases de E et F, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\mathrm{Bil}(E, F) \simeq \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \ .$$

Cet isomorphisme dépend du choix des bases. Que deviennent les matrices après un changement de bases ?

3.2 Formules de changement de bases

Soit $B : E \times F \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.

Soient e' une nouvelle base de E, f' une nouvelle base de F.On note P la matrice de passage de e à e' et Q la matrice de passage de f à f'.

Soient A la matrice de B dans les bases e, f, A' la matrice de B dans les bases e', f', alors :

$$A' = {}^tPAQ$$

En particulier, le rang r de la matrice associée ne change pas car P et Q sont inversibles. On dit que r est le *rang* de la forme bilinéaire B.

Proposition 3.2.1 *Soient E, F de dimension finie m, n. Soit $B : E \times F \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire de rang r. Alors il existe une base (e) de E et une base (f) de F telle que*

$$\mathrm{Mat}(B)_{(e),(f)} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

autrement dit si $x = x_1e_1 + ...x_me_m$ et $y = y_1f_1 + ... + y_nf_n$, alors : $B(x, y) = x_1y_1 + ... + x_ry_r$.

Démonstration : En effet, fixons e_0, f_0 deux bases de E et F. Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice de B dans e_0, f_0. La matrice A est de rang r. Donc il existe $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Mais alors, si on note e la base de E et f la base de F telles que :

$$P_{e_0}^{e} = {}^tP \text{ et } P_{f_0}^{f} = Q$$

la nouvelle matrice de B dans les bases e, f est :

$${}^{tt}PAQ = PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) .$$

q.e.d.

3.3 Formes bilinéaires non dégénérées

On dit qu'une forme bilinéaire $B : E \times F \to \mathbb{K}$ est *régulière* ou *non dégénérée* si les **deux** conditions suivantes sont vérifiées :

i) $B(x, b) = 0$ pour tout $x \in E$ entraîne $b = 0$;

ii) $B(a, y) = 0$ pour tout $y \in F$ entraîne $a = 0$.

Exemples :

— si $E = F = \mathbb{K}^n$ et si $B(x, y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.

— si $E = F^*$ et si $B(x, y) = \langle x, y\rangle$.

Théorème 3.3.1 *Supposons E, F de dimension finie. Si $B : E \times F \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire régulière, alors $\dim E = \dim F$ et pour chaque base $e_1, ..., e_n$ de E, il existe une unique famille $f_1, ..., f_n$ de F telle que :*

$$(*)\ \ \forall\, 1 \leq i, j \leq n,\ B(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$$

de plus, les f_i forment une base de F. On dit que deux bases e, f de E et F qui vérifient $(*)$ sont duales l'une de l'autre.

Démonstration : Soit $\varphi : F \to \mathbb{K}^n$, $b \mapsto (B(e_1, b), ..., B(e_n, b))$. C'est une application linéaire injective car $\varphi(b) = 0 \Leftrightarrow \forall\, x \in E, B(x, b) = 0 \Rightarrow b = 0$. Donc $\dim F \leq n = \dim E$. De même, $\dim E \leq \dim F$. Donc $\dim E = \dim F = n$. Donc φ est surjective. Soit $E_1, ..., E_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soient $f_1, ..., f_n \in F$ tels que $\varphi(f_j) = E_j$. On a alors :

$$\forall\, 1 \leq i, j \leq n,\ B(e_i, f_j) = \delta_{i,j}\ \ .$$

Les f_i forment une base de F car ils sont linéairement indépendants (car leurs images le sont). Si $(f'_1, ..., f'_n)$ vérifient aussi :

$$\forall\, 1 \leq i, j \leq n,\ B(e_i, f'_j) = \delta_{i,j}\ \ .$$

Alors : $\forall\, i, j,\ B(e_i, f_j - f'_j) = 0$ donc $\forall\, j,\ f_j - f'_j = 0$. D'où l'unicité. *q.e.d.*

3.4 Orthogonaux

Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $B : E \times F \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. On dit que deux éléments $x \in E$, $y \in F$ sont *orthogonaux* si $B(x, y) = 0$.

Si $X \subseteq E$ et $Y \subseteq F$ sont des sous-espaces vectoriels, on note :

$$X^\perp := \{y \in F\ :\ B(x, y) = 0 \text{ pour tout } x \in X\}$$

$$^\perp Y := \{x \in E\ :\ B(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in Y\}\ \ .$$

Les ensembles $X^\perp$ et $^\perp Y$ sont des sous-epaces vectoriels de E et F, respectivement.

De plus :

$$X \subseteq {}^\perp(X^\perp)\,,\ Y \subseteq ({}^\perp Y)^\perp\ \ .$$

Exercice 6 Pour tout X sous-espace de E et tout Y sous-espace de F :

$$({}^\perp(X^\perp))^\perp = X^\perp \text{ et } {}^\perp(({}^\perp Y)^\perp) = {}^\perp Y \ .$$

On appelle ${}^\perp F$ le *noyau à gauche* de B et $E^\perp$ le *noyau à droite* de B.
La forme bilinéaire B est régulière $\Leftrightarrow {}^\perp F = 0$ et $E^\perp = 0$.

Proposition 3.4.1 (théorème du rang pour les formes bilinéaires) *Si E et F sont de dimension finies, alors :*

$$\dim E + \dim E^\perp = \dim F + \dim {}^\perp F$$

de plus :

$$\dim E - \dim {}^\perp F = \dim F - \dim E^\perp = r$$

le rang de B. En particulier, si $E = F$, le noyau à droite et le noyau à gauche sont de même dimension.

Démonstration : L'application :

$$\overline{B} : E/{}^\perp F \times F/E^\perp \to \mathbb{K}\,,\ (x \bmod {}^\perp F, y \bmod E^\perp) \mapsto B(x,y)$$

est bien définie, linéaire. C'est une forme bilinéaire régulière. En effet, si $b \in F$ et si $\overline{B}(x \bmod {}^\perp F, b \bmod E^\perp) = 0$ pour tout $x \in E$, alors :

$$\forall\, x \in E,\ B(x,b) = 0$$

donc $b \in {}^\perp F$ *i.e.* $b \bmod {}^\perp F = 0$. De même pour le noyau à droite.

Donc, d'après le théorème 3.3.1, on a :

$$\dim E/{}^\perp F = \dim F/E^\perp \Leftrightarrow \dim E + \dim E^\perp = \dim F + \dim {}^\perp F \ .$$

Soit r le rang de B. Alors, $r \leq m, n$ et il existe une base $e_1, ..., e_m$ de E, une base $f_1, ..., f_n$ de F telles que

$$\forall\, x = x_1e_1 + ... + x_me_m \in E,\ \forall\, y = y_1f_1 + ... + y_nf_n \in F,$$

$$B(x,y) = x_1y_1 + ... + x_ry_r \ .$$

On a donc : $y = y_1f_1 + ... + y_nf_n \in E^\perp \Leftrightarrow x_1y_1 + ... + x_ry_r = 0$ pour tous $x_1, ..., x_r \in \mathbb{K} \Leftrightarrow y_1 = ... = y_r = 0$. Donc $f_{r+1}, ..., f_n$ est une base de $E^\perp$ et $\dim E^\perp + r = \dim F$.

q.e.d.

Proposition 3.4.2 *Soit $B : E \times F \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire régulière. Si E et F sont de dimension finies, alors pour tout X sous-espace de E, on a :*

$$\dim X + \dim X^\perp = \dim E\,,\ {}^\perp(X^\perp) = X \ .$$

Démonstration : Soit $e_1, ...e_r$ une base de X que l'on complète en $e_1, ..., e_n$ une base de E. Soit $f_1, ..., f_n$ la base duale de F correspondante. Alors, $f_{r+1}, ..., f_n$ est une base de $E^\perp$. En effet, si $t_1, ..., t_n \in \mathbb{K}$,

$$t_1 f_1 + ... + t_n f_n \in X^\perp \Leftrightarrow B(e_i, t_1 f_1 + ... + t_n f_n) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq r$$

$$\Leftrightarrow t_i = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq r \ .$$

Donc $\dim X^\perp = n - r = \dim E - \dim X$. De façon symétrique, on peut montrer que si $Y \subseteq F$ est un sous-espace, alors $\dim Y + \dim {}^\perp Y = \dim F$.

On a donc $\dim({}^\perp(X^\perp)) = \dim F - \dim X^\perp = \dim F - \dim E + \dim X = \dim X$. Or, on a l'inclusion :

$$X \subseteq {}^\perp(X^\perp)$$

donc l'égalité. *q.e.d.*

3.5 Dual

Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $B : E \times F \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.

On pose $\gamma_B : E \to F^*$, $x \mapsto B(x, \cdot)$ et $\delta_B : F \to E^*$, $y \mapsto B(\cdot, y)$.

Ce sont des applications linéaires, *l'application linéaire à gauche* associée à B et *l'application linéaire à droite* associée à B.

On a :

$$\ker \gamma_B = {}^\perp F = \text{ le noyau à gauche}$$

$$\ker \delta_B = E^\perp = \text{ le noyau à droite}$$

En particulier, B est non dégénérée si et seulement si $\ker \gamma_B = 0$ et $\ker \delta_B = 0$.

Proposition 3.5.1 *Si E et F sont de dimension finie, si $B : E \times F \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire non dégénérée, alors tout élément de F^* est de la forme $B(x, \cdot)$ pour un certain $x \in E$.*

Démonstration : Si B est non dégénérée, alors $\dim E = \dim F = \dim F^*$ de plus, l'application :

$$\gamma_B : E \to F^* \ , \ x \mapsto B(x, \cdot)$$

est injective donc surjective. *q.e.d.*

3.6 Formes bilinéaires symétriques et formes bilinéaires alternées

Soit $B : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. On dit que B est *symétrique* si $B(x,y) = B(y,x)$ pour tous $x, y \in E$. On dit que B est *antisymétrique* si $B(x,y) = -B(y,x)$, pour tous $x, y \in E$. On dit que B est *alternée* si $B(x,x) = 0$ pour tous $x \in E$.

Proposition 3.6.1 *Alternée $\Rightarrow$ antisymétrique. Si on peut diviser par 2, antisymétrique $\Rightarrow$ alternée.*

Proposition 3.6.2 *Soit $B : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire telle que pour tous $x, y \in E$, $B(x,y) = 0 \Leftrightarrow B(y,x) = 0$. Alors B est symétrique ou alternée.*

Démonstration :
Soient $x, y \in E$. Alors :

$$B(x,x)B(x,y) = B(x, B(x,y)x) = B(x, B(x,x)y)$$

$$\Leftrightarrow B(x, B(x,y)x - B(x,x)y) = 0$$

$$\Leftrightarrow B(B(x,y)x - B(x,x)y, x) = 0$$

$$B(x,y)B(x,x) - B(x,x)B(y,x) = 0$$

$$\Leftrightarrow B(x,x)(B(x,y) - B(y,x)) = 0 \quad (*) \ .$$

Supposons que B n'est pas alternée. Soit $x_0 \in E$ tel que $B(x_0, x_0) \neq 0$. Alors d'après (*), on a :

$$B(x_0, y) = B(y, x_0)$$

pour tout $y \in E$.

Soient $x, y \in E$. Si $B(x,x) \neq 0$, alors $B(x,y) = B(y,x)$. Si $B(x,x) = 0$ soit $B(x, x_0) = 0$ et alors $B(x+x_0, x+x_0) = B(x_0, x_0) \neq 0 \Rightarrow B(x+x_0, y) = B(y, x+x_0) \Rightarrow B(x,y) = B(y,x)$; soit $B(x, x_0) \neq 0$ et alors si $t := -\frac{B(x,x_0)}{B(x_0,x_0)}$, on a :

$$B(x + tx_0, x + tx_0) = -t^2 B(x_0, x_0) \neq 0$$

donc :

$$B(x + tx_0, y) = B(y, x + tx_0) \Rightarrow B(x,y) = B(y,x)$$

et dans tous les cas : $B(x,y) = B(y,x)$ *i.e.* B est symétrique.

q.e.d.

Chapitre 4

Formes quadratiques, formes hermitiennes

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $Q : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique.

Exemple : le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

4.1 Polarisation

Une forme bilinéaire symétrique Q est entièrement déterminé par les valeurs $Q(x, x) \in \mathbb{K}$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \frac{Q(x+y,x+y) - Q(x,x) - Q(y,y)}{2} \\ &= \frac{Q(x+y,x+y) - Q(x-y,x-y)}{4} \end{aligned}$$

Une application $q : E \to \mathbb{K}$ est une *forme quadratique* s'il existe une forme bilinéaire symétrique $Q : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que :

$$q(x) = Q(x,x)$$

pour tout $x \in \mathbb{K}$. On dit que Q est la *forme polaire* de q.

Proposition 4.1.1 *Si q est une forme quadratique, alors la forme polaire Q associée est unique et vérifie :*

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} \\ &= \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4} \end{aligned}$$

pour tous $x, y \in E$.

Exemple de base : Soit A une matrice $n \times n$ symétrique *c-à-d* telle que ${}^tA = A$. Alors,

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}\,,\ X \mapsto {}^tXAX$$

est une forme quadratique. Sa forme polaire est la forme bilinéaire symétrique de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 7 Soit $B : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. Alors, l'application $E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto B(x,x)$ est une forme quadratique de forme polaire $\frac{B(x,y)+B(y,x)}{2}$.

4.2 Matrices

Supposons que E possède une base $(e_1, ..., e_n)$. Si q est une forme quadratique sur E, de forme polaire Q, on dit que la matrice :

$$Mat(q)_e := (Q(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

est la matrice de q dans la base e. C'est une matrice symétrique !

Proposition 4.2.1 *L'espace vectoriel $\mathscr{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E est isomorphe à l'espace des matrices $n \times n$ symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$. En particulier $\mathscr{Q}(E)$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.*

Remarquons que si A est la matrice de q dans la base e alors pour tous vecteurs :

$$x = x_1e_1 + ... + x_ne_n \in E$$

on a :

$$q(x) = {}^tXAX$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Formule de changement de bases

Soient $e := (e_1, ..., e_n)$ et $e' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E. Alors si P est la matrice de passage de e à e', les matrices A de q dans la base e et A' de q dans la base e' vérifient :

$$A' = {}^tPAP\ .$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont *congruentes* s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$B = {}^tPAP\ .$$

Exemple : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la forme quadratique $q_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := x^2 + y^2$ et $q_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := xy$ ont pour matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

Remarque : Comment savoir si une fonction $q : E \to \mathbf{k}$ est une forme quadratique ?

— on essaie de deviner $\varphi : E \times E \to \mathbf{k}$ bilinéaire (symétrique) telle que $\varphi(x, x) = q(x)$.

— ou bien on vérifie que $q(tx) = t^2 q(x)$ (facile) si ce n'est pas le cas, q n'est pas une forme quadratique. Si c'est le cas on vérifie que $x, y \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ est bilinéaire (beaucoup de calculs en perspective).

Exemple : — Soit $l \in E^*$, alors l^2 est une forme quadratique sur E.

— Soient $l_1, l_2 \in E^*$, alors $l_1 l_2$ est une forme quadratique sur E.

Un *polynôme homogène de degré* 2 en $x_1, ..., x_n$ est une expression de la forme : $a_{1,1}x_1^2 + ... + a_{n,n}x_n^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j} x_i x_j$ où les $a_{i,j} \in \mathbf{k}$.

Proposition 4.2.2 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel avec une base $e_1, ..., e_n$. Les formes quadratiques sur E sont les applications de la forme :*

$$q : E \to \mathbb{K}$$

telles que pour tout $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \in E$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$,

$$q(x) = P(x_1, ..., x_n)$$

où P est un polynôme homogène de degré 2 en les x_i.

Démonstration : Posons $a_{i,j} := Q(e_i, e_j)$ pour tous $1 \le i, j \le n$. Alors :

$$\begin{aligned} q(x) &= Q(x_1 e_1 + ... + x_n e_n, x_1 e_1 + ... + x_n e_n) \\ &= \sum_{1 \le i,j \le n} x_i x_j Q(e_i, e_j) \\ &= \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j} x_i x_j \\ &= \sum_{1 \le i \le n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2 a_{i,j} x_i x_j \end{aligned}$$

car $a_{i,j} = a_{j,i}$ donc $a_{i,j} x_i x_j + a_{j,i} x_j x_i = 2 a_{i,j} x_i x_j$. *q.e.d.*

Remarque : Soit $q(x_1, ..., x_n) := \sum_i a_{i,i}x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{i,j}x_ix_j$ une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$. La matrice associée est symétrique et son coefficient (i, j), $i \leq j$, est $a_{i,j}$ *i.e.* la matrice associée est :

$$(\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j} \ .$$

La forme polaire de q est :

$$Q(x, y) = \sum_i a_{i,i}x_iy_i + \sum_{i<j} a_{i,j}(x_iy_j + x_jy_i)$$

pour tous $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$.

Exemple : sur $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4.3 Rang, noyau, cône isotrope

Soit q une forme quadratique sur E. On suppose E de dimension finie. Le *rang* de q est le rang de sa forme polaire Q *c-à-d* le rang de la matrice $(Q(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ pour une base $e_1, ..., e_n$ de E quelconque. C'est indépendant de la base choisie.

Le *noyau* de q est le noyau de sa forme polaire Q *i.e.* :

$$\ker q = \{x \in E \ : \ \forall\, y \in E,\, Q(x, y) = 0\} \ .$$

Il ne faut pas confondre le noyau de q et son cône isotrope :

$$C(q) := \{x \in E \ : \ q(x) = 0\} \ .$$

On a toujours $\ker q \subseteq C(q)$ mais attention, en général $C(q)$ n'est pas un sous-espace de E.

Exemple : Si $q(x, y) = xy$, $\ker q = \{0\}$ et $C(q) = (x = 0) \cup (y = 0)$.

Définition 1 *Une forme quadratique q est définie si son cône isotrope est nul* i.e. *si $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Une forme quadratique est non dégénérée si son noyau est nul.*

Exemple : $q(x, y) = xy$ est non dégénérée mais n'est pas définie. En revanche, $q(x, y) = x^2 + y^2$ est définie (et donc non dégénérée sur $\mathbb{R}^2$).

4.4 Diagonalisation faible

Jusqu'où peut-on simplifier l'expression d'une forme quadratique par le choix d'une base convenable ?

Toute forme quadratique peut s'exprimer comme une forme diagonale dans une certaine base.

On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux pour une forme quadratique q sur E de forme polaire Q si $Q(x, y) = 0$.

Théorème 4.4.1 *Soit q une forme quadratique sur E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux pour q si $Q(x, y) = 0$ pour la forme polaire Q de q. Alors, il existe toujours une base $e_1, ..., e_n$ de E formé de vecteurs deux à deux orthogonaux* i.e. *où la matrice de q est diagonale.*

Démonstration : On raisonne par récurrencesur n la dimension finie. Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer. Si $q = 0$, c'est évident. Sinon, soit e_1 tel que $q(e_1) \neq 0$. Soit $H := \{x \in E \ : \ Q(e_1, x) = 0\}$. Le sous-espace H est de dimension $n-1$ car c'est le noyau de la forme linéaire :$E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto Q(x, e_1)$ (non nulle car $q(e_1) = Q(e_1, e_1) \neq 0$). Par hypothèse de récurrence, il existe une base $e_2, ..., e_n$ de E de vecteurs deux à deux orthogonaux. Alors, la base $e_1, ..., e_n$ convient. *q.e.d.*

Remarquons que si la base $e_1, ..., e_n$ est orthogonale pour q, alors $q(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = a_1x_1^2 + ... + a_nx_n^2$ où $a_i = q(e_i)$ pour tout i.

Corollaire 4.4.1.1 *Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.*

Exemple :

$$
{}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .
$$

Méthode de Gauss

Soit $q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}x_ix_j$ une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$. Nous allons écrire q comme une combinaison de carrés de formes linéaires indépendantes en procédant par récurrence sur n.

Premier cas : il existe un indice i tel que $a_{i,i} \neq 0$ par exemple : $a_{1,1} = a \neq 0$. Alors $q(x_1, ..., x_n) = ax_1^2 + x_1B(x_2, ..., x_n) + C(x_2, ..., x_n)$ où B est une forme linéaire et C une forme quadratique en les $x_2, ..., x_n$. On écrit alors :

$$
q(x_1, ..., x_n) = a\left(x_1 + \frac{B(x_2, ..., x_n)}{2a}\right)^2 + (C(x_2, ..., x_n) - \frac{B(x_2, ..., x_n)^2}{4a})
$$

puis on applique l'hypothèse de récurrence à la forme quadratique $C-\frac{B^2}{4a}$. On obtient des formes linéaires indépendantes en les $x_2, ..., x_n$. Ces formes lionéaires sont forcément indépendantes de la forme linéaire $x_1 + \frac{B}{2a}$.

Deuxième cas : Tous les indices $a_{i,i}$ sont nuls. Si $q = 0$ c'est fini sinon il existe $i < j$ tel que $a_{i,j} \neq 0$. Par exemple, $a_{1,2} = a \neq 0$. On peut alors écrire :

$$q(x_1, ..., x_n) = ax_1x_2 + x_1B(x_3, ..., x_n) + x_2C(x_3, ..., x_n) + D(x_3, ..., x_n)$$

où B, C sont des formes linéaires et D une forme quadratique en $x_3, ..., x_n$. On écrit alors :

$$q(x_1, ..., x_n) = a(x_1 + \frac{C}{a})(x_2 + \frac{B}{a}) + (D - \frac{BC}{a})$$

$$= \frac{a}{4}\left(x_1 + x_2 + \frac{C}{a} + \frac{B}{a}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{C}{a} - \frac{B}{a}\right)^2 + (D - \frac{BC}{a})$$

les deux premiers termes sont des carrés de formes linéaires indépendantes et on itère la méthode de Gauss à partir de la forme quadratique $(D - \frac{BC}{a})$.

La méthode de Gauss donne automatiquement des formes linéaires indépendantes.

Supposons que E est de dimension n. Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique. Si $l_1, ..., l_n$ est une famille de formes linéaires linéairement indépendantes telles que :

$$q = a_1 l_1^2 + ... + a_n l_n^2$$

pour certains $a_i \in \mathbb{K}$, alors $l_1, ..., l_n$ est une base de E^* et si $e_1, ..., e_n$ est la base anteduale *i.e.* :

$$\forall\, 1 \leq i, j \leq n\,,\ l_i(e_j) = \delta_{i,j}\ ,$$

alors, la base $e_1, ..., e_n$ est orthogonale. En effet, si on note Q la forme polaire de q, on a :

$$Q(e_i, e_j) = \frac{1}{2}(q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j)) = \frac{1}{2}(a_i + a_j - a_i - a_j) = 0$$

si $i \neq j$.

4.5 Classification des formes quadratiques complexes

On suppose que E est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie n.

Théorème 4.5.1 *Soit $q : E \to \mathbb{C}$ une forme quadratique sur E. Alors il existe une base $e_1, ..., e_n$ de E telle que :*

$$q(x) = x_1^2 + ... + x_r^2$$

pour tout $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n \in E$. L'entier r est le rang de q.

Remarque : $0 \leq r \leq n$.

« Le rang des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ les classifient complètement » . En revanche sur $\mathbb{R}$, le rang ne suffit pas ...

4.6 Classification des formes quadratiques réelles

On suppose que E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Une forme quadratique f sur E est *positive* si pour tout $x \in E$, $f(x) \geq 0$. On dit que f est *définie positive* si pour tout $0 \neq x \in E$, $f(x) > 0$. On définit de même les formes quadratiques (définies) négatives.

Théorème 4.6.1 *Supposons que E est de dimension finie n. Alors, il existe une base $e_1, ..., e_n$ de E telle que pour tout $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n \in E$,*

$$f(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2$$

où $p, q \geq 0$, $p + q \leq n$. De plus les entiers p, q sont indépendants de la base $e_1, ..., e_n$ et $p + q = r$ le rang de f.

On apppelle (p, q) la *signature* de f.

La signature classifie les formes quadratiques réelles.

Supposons que E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n. Soient $l_1, ..., l_n$ des formes linéaires indépendantes sur E. Soient $a_1, ..., a_n$ des réels. Alors la forme quadratique $a_1l_1^2 + ... + a_nl_n^2$ (quelle est sa forme polaire ? *(exo)*) est de signature (p, p') où p est le nombre de coefficients $a_i > 0$ et p' celui des $a_i < 0$ et son rang est $r = p + p'$ le nombre de coefficients $a_i \neq 0$.
Démonstration : Soit $e_1, ..., e_n$ la base anteduale de $l_1, ..., l_n$. Alors $q(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = a_1x_1^2 + ... + a_nx_n^2$. Soit $b_i > 0$ tel que $b_i^2 = |a_i|$ si $a_i \neq 0$. Quitte à remplacer les e_i par $\frac{e_i}{b_i}$, on a : $a_i = \pm 1$ ou 0.

q.e.d.

Proposition 4.6.2 *Soit f une forme quadratique sur E de signature (p, q) alors p est la dimension maximale d'un sous-espace sur lequel f est définie positive et q la dimension maximale sur lequel f est définie négative.*

Démonstration : Soit $e_1, ..., e_n$ une base de E telle que :

$$f(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2$$

pour tout $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$. Notons p_+ la dimension maximale d'un sous-espace sur lequel f est définie positive. La forme f est définie positive sur $\langle e_1, ..., e_p\rangle$. donc $p \leq p_+$. D'un autre côté, f est négative sur $F := \langle e_{p+1}, ..., e_n\rangle$. Donc si f est définie positive sur un sous-espace P de dimension p_+, on a : $P \cap F = 0$. Donc :

$$\dim(P + F) = \dim P + \dim F \leq n$$

$$\Leftrightarrow p_+ \leq n - \dim F = p \ .$$

q.e.d.

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n.

Proposition 4.6.3 *Soit $f : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique définie positive. Alors il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ de E telle que*

$$f(x) = x_1^2 + ... + x_n^2$$

pour tout $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \in E$.

4.7 Formes hermitiennes

Les formes quadratiques définies positives jouent un rôle important, on peut les utiliser pour définir des normes et des fonctions longueurs. Sur un $\mathbb{C}-$espace vectoriel il ne peut y avoir de formes quadratiques définies positives car si $q(x) > 0$, alors : $q(ix) = -q(x) < 0$. Néanmoins, on peut construire une théorie semblable à celle des formes quadratiques réelles sur un espace vectoriel complexe en utilisant, à la place des formes quadratiques, les formes hermitiennes introduites par Charles Hermite (1822-1901).

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

Une *forme hermitienne* sur E est une application $h : E \to \mathbb{R}$ de la forme $h(x) = H(x, x)$, pour tout $x \in E$, où $H : E \times E \to \mathbb{C}$ est *sesquilinéaire* et à *symétrie hermitienne i.e.* :

$$H(x, y + ty') = H(x, y) + tH(x, y')$$

$$H(x + tx', y) = H(x, y) + \bar{t}H(x', y)$$

$$H(x, y) = \overline{H(y, x)}$$

pour tous $x, y \in E$, $t \in \mathbb{C}$.

La forme H est déterminée par h. En effet, comme pour les formes quadratiques, on a des formules de polarisation pour les formes hermitiennes :

$$\mathrm{Re}(H(x, y) = \frac{1}{2}(h(x + y) - h(x) - h(y))$$

$$\mathrm{Im}\,(H(x, y) = \frac{1}{2}(h(x) + h(y) - h(x + iy)$$

ou :

$$H(x, y) = \frac{1}{4}\left(h(x + y) - h(x - y) + ih(x + iy) - ih(x - iy)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0,1,2,3} i^k h(x + i^k y)\right) \ .$$

On appelle H la *forme polaire* de h.

Exemple : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$^t\overline{A} = A$$

on dit que A est *hermitienne.* Alors sur $\mathbb{C}^n$, l'application :

$$\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}\ ,\ Z \mapsto {}^t\overline{Z}AZ$$

est une forme hermitienne.

Remarque : l'espaces des formes hermitiennes de E dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Matrices

Si h est une forme hermitienne sur E, de forme polaire H, si $\underline{v} = (v_1, ..., v_n)$ est une base de E, alors la matrice

$$A := (H(v_i, v_j))_{1\leq i,j\leq n}$$

est appellée la matrice de h dans la base $(v_1, ..., v_n)$. La matrice A est égale à sa transconjuguée *i.e.* :

$$A = {}^t\overline{A}$$

(en particulier la diagonale est réelle).

Une matrice A telle que $A = {}^t\overline{A}$ est appelée *hermitienne.*

Souvent on note A^* à la place de ${}^t\overline{A}$.

Exercice 8 Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $(AB)^* = B^*A^*$.

Si $x = x_1v_1 + ... + x_nv_n$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$, la valeur $h(x)$ est donnée par

$$h(x) = {}^t\overline{X}AX$$

où $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Changement de bases

Si $\underline{v'} = v'_1, ..., v'_n$ est une autre base de E, si P est la matrice de passage de $\underline{v}$ à $\underline{v'}$, alors la matrice de h dans la nouvelle base est

$$A' = P^*AP\ .$$

Exercice 9 Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Alors il existe S une matrice symétrique réelle et A une matrice antisymétrique réelle telles que $H = S + iA$. En déduire que l'espace des matrices hermitiennes de taille n est un espace vectoriel **réel** de dimension n^2.

Rang

Le *rang* d'une forme hermitienne h est le rang de sa matrice dans une base. Ce rang ne dépend pas de la base choisie à cause de la formule de changement de base.

Exemple : Sur $\mathbb{C}^2$, la forme hermitienne :

$$h(x,y) = |x|^2 - 2|y|^2 + \frac{3}{2}x\overline{y} + \frac{3}{2}\overline{x}y$$

a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. C'est donc une forme de rang 2.

Méthode de Gauss

Comme une forme quadratique, toute forme hermitienne se « réduit » en une combinaison linéaire réelle de modules au carré de formes linéaires complexes linéairement indépendantes. Il suffit de remplacer dans la méthode de Gauss des formes quadratiques les carrés par des carrés de modules.

Exemples : $h_1(x,y) = x\overline{y}+\overline{x}y$ se réduit en $\frac{1}{2}(|x+y|^2-|x-y|^2)$. $h_2(x,y) = |x|^2+|y|^2-2i\overline{x}y+2ix\overline{y}+2y\overline{z}+2\overline{y}z$ se réduit en $|x-2iy|^2-3\left|y-\frac{2z}{3}\right|^2+\frac{4}{3}|z|^2$.

Théorème 4.7.1 *Soit h une forme hermitienne sur un espace vectoriel complexe V de dimension n. Il existe une base $v_1, ..., v_n$ de V où*

$$h(v) = |x_1|^2 + ... + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - ... - |x_{p+q}|^2$$

pour tous $v = x_1v_1 + ... + x_nv_n \in V$ et pour certains entiers $p, q \geq 0$ tels que $p + q \leq n$.

Les entiers p, q sont indépendants de la base choisie et on dit que (p, q) est la signature de h. De plus, $p + q$ est le rang de h.

Si $h = a_1|l_1|^2 + ... + a_r|l_r|^2$ pour certaines formes linéaires indépendantes sur V et certains $a_i \in \mathbb{R}$, la signature de h est (p, q) où p est le nombre de $a_i > 0$, q est le nombre de $a_i < 0$.

On dit qu'une forme hermitienne h sur un espace vectoriel E est positive si pour tout $x \in E$, $h(x) \geq 0$. On dit qu'elle est définie positive si pour tout $0 \neq x \in E$, $h(x) > 0$.

On définit le noyau d'une forme hermitienne comme le noyau d'une forme quadratique *i.e.* : si h est une forme hermitienne sur un espace E de forme polaire H le noyau de h est :

$$\ker h = \{x \in E \ : \ H(x,y) = 0 \text{ pour tout } y \in E\} \ .$$

4.8 Formes quadratiques et hermitiennes positives

Soit φ une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E ou une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}-$espace vectoriel E. On notera Φ la forme polaire de φ.

Lemme 4.8.1 *Supposons E de dimension finie. Si φ est positive (respectivement définie positive) sur E, alors le déterminant de la matrice de φ dans une base est ≥ 0 (respectivement > 0).*

Théorème 4.8.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Si φ est positive, alors pour tous $x, y \in E$:*

$$|\Phi(x, y)|^2 \leq \varphi(x)\varphi(y)$$

si de plus, φ est définie positive, il y a égalité si et seulement si x, y sont liés.

Corollaire 4.8.2.1 (Inégalité de Minkowski) *Si φ est positive, alors pour tous $x, y \in E$:*

$$\sqrt{\varphi(x+y)} \leq \sqrt{\varphi(x)} + \sqrt{\varphi(y)}\ .$$

4.9 Orthogonalisation de Gram-Schmidt

Définition 2 *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice $n \times n$. Les mineurs principaux de A sont les nombres $\delta_k := \text{dét}\left((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}\right)$, $1 \leq k \leq n$.*

EXEMPLE : $\delta_n = \text{dét} A$.

Théorème 4.9.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit q une forme quadratique réelle sur E. Soient $e_1, ..., e_n$ une base de E et A la matrice de q dans cette base. Si tous les mineurs principaux de A, $\delta_1, ..., \delta_n$, sont non nuls alors il existe une unique base $f_1, ..., f_n$ de E telle que :*

i) $f_1, ..., f_n$ est une base orthogonale ;

ii) pour tout k, $f_k = e_k \bmod \langle e_1, ..., e_{k-1} \rangle$.

De plus les f_k vérifient : $q(f_k) = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$ $1 \leq k \leq n$ $(\delta_0 := 1)$.

Remarque : Si q est définie positive, tous les δ_k sont > 0 et on obtient une base orthonormale en posant $f'_k := \frac{f_k}{\sqrt{q(f_k)}}$.

Remarque : L'hypothèse sur les mineurs signifie que $q\Big|_{\langle e_1, ..., e_k \rangle}$ est non dégénérée pour tout k. Par exemple si q est définie positive (sur $\mathbb{R}$). Le théorème est encore vrai en dimension dénombrable.

Corollaire 4.9.1.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.*

Soit φ une forme quadratique (ou hermitienne) sur E. Soit A la matrice de φ dans une base. On note $|A_1|, ..., |A_n|$ les mineurs principaux de A et A_I les matrices $(A_{i,j})_{i,j \in I}$ pour toute partie I de $\{1, ..., n\}$.

i) La forme φ est définie positive $\Leftrightarrow$ tous les mineurs principaux $|A_k|$, $1 \leq k \leq n$ sont > 0.

ii) La forme φ est positive $\Leftrightarrow |A_I| \geq 0$ pour tout $I \subseteq \{1, ..., n\}$.

Exemple : La forme quadratique $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + dy^2$ est définie positive si et seulement si $a, ad - b^2 > 0$. Elle est positive si et seulement si $a, d, ad - b^2 \geq 0$.

Corollaire 4.9.1.2 *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice.*

i) Si A est symétrique réelle ou hermitienne définie positive, alors :

$$|\text{dét} A| \leq a_{1,1} ... a_{n,n} \ .$$

ii) Inégalité d'Hadamard :

Si A est complexe, alors :

$$|\text{dét} A| \leq \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^2} \ .$$

Corollaire 4.9.1.3 *Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique réelle de matrice A dans une base $e_1, ..., e_n$ de E. On note $\delta_1, ..., \delta_n$ les mineurs principaux de A. Si $\delta_1, ..., \delta_n$ sont non nuls, alors la signature de q est $(n - s, s)$ où s est le nombre de changement de signes dans la suite :*

$$1, \delta_1, ..., \delta_n \ .$$

4.10 Orthogonalité

Soit φ une forme quadratique ou hermitienne sur E (dans le cas de la forme hermitienne, on suppose bien sûr que E est un espace vectoriel complexe) de forme polaire Φ. On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux (*sous-entendu* pour Φ) si $\Phi(x, y) = 0$.

Si F est un sous-espace de E, on note $F^\perp := \{x \in E \ : \ \Phi(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in F\}$.

Exercice 10 Vérifier que si $F_1 \subseteq F_2$, alors $F_1^\perp \supseteq F_2^\perp$.

Théorème 4.10.1 *Si E est de dimension finie, alors :*

i) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \ker \varphi)$ *;*

ii) $F^{\perp\perp} = F + \ker \varphi$.

Proposition 4.10.2 *Soit φ une forme quadratique (ou hermitienne) sur E* **non dégénérée**. *Soit F un sous-espace de dimension finie de E. Si φ est définie ou si $\varphi|_F$ est non dégenérée, alors :*

$$i) \ F \oplus F^\perp = E \text{ et } ii) \ F^{\perp\perp} = F \ .$$

Chapitre 5

Espaces euclidiens et hermitiens

5.1 Espaces euclidiens

Un *espace euclidien* est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E de dimension finie, muni d'une forme quadratique définie positive. On notera $\langle x, y\rangle$ la forme polaire associée évaluée en $x, y \in E$. On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un *produit scalaire* .

Exemple standard : L'espace $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel :

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

où $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$.

Exemple : L'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec le produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \ .$$

On peut définir la longueur d'un vecteur et l'angle entre deux vecteurs dans un espace euclidien. On peut définir ces notions de sorte qu'elles coïncident avec les définitions usuelles dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Soit $E, (\cdot, \cdot)$ un espace euclidien.

On pose :

$$|x| := \sqrt{(x, x)} \ .$$

Proposition 5.1.1 *Pour tous $x, y \in E$,*

$$|(x, y)| \leq |x||y|$$

et l'égalité est réalisée si et seulement si les vecteurs x, y sont colinéaires.

Si $x, y \in E$ sont des vecteurs non nuls, on définit *l'angle* entre x et y comme le réel $\widehat{xy} \in [0, \pi]$ tel que :

$$\cos \widehat{xy} = \frac{(x, y)}{|x||y|} \ .$$

En particulier, $\widehat{xy} = 0$ ou π si et seulement si x, y sont colinéaires. Si x et y sont orthogonaux *i.e.* si $(x, y) = 0$, alors $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz se généralise avec les matrices de Gram.

Soient $a_1, ..., a_k \in E$. La matrice :

$$G(a_1, ..., a_k) := \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & ... & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & ... & (a_2, a_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & ... & (a_k, a_k) \end{pmatrix}$$

est la *matrice de Gram* du système $(a_1, ..., a_k)$.

Théorème 5.1.2 *Pour tous $a_1, ..., a_k \in E$, $\mathrm{dét}(G(a_1, ..., a_k)) \geq 0$. L'égalité est atteinte si et seulement si les vecteurs $a_1, ..., a_k$ sont liés.*

Une *base orthonormale* de E est une base $(e_1, ..., e_n)$ de E où la matrice de $(\cdot, \cdot)$ est l'identité *i.e.* :

$$(e_i, e_j) = 1 \text{ si } i = j, \ 0 \text{ sinon.}$$

Soit $e_1, ..., e_n$ une base de E. Soient $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n \in E$, $y = y_1e_1 + ... + y_ne_n$, alors :

$$(x, y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n \text{ et } |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \ .$$

En particulier, si $e'_1, ..., e'_n$ est une autre base orthonormale de E, la matrice de passage O de $(e_1, ..., e_n)$ à $(e'_1, ..., e'_n)$ vérifie :

$$^tOO = I_n \ .$$

Proposition 5.1.3 *Pour une matrice $O \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, sont équivalentes :*
i) $^tOO = I_n$;
ii) $O^tO = I_n$;
iii) O est une matrice de passage d'une base orthonormale dans une autre.

On dit dans ce cas que O est une matrice **orthogonale** . On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales $n \times n$.

Exercice 11 $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 5.1.4 *Une matrice orthogonale est de déterminant ± 1.*

Projection orthogonale

Soit F un sous-espace de E. On note $F^{\perp}$ son orthogonal pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. Comme le produit scalaire est *défini*, on a :

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

autrement dit tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique en :

$$x = y + z$$

où $y \in F, z \in F^{\perp}$. On note $y := \mathrm{pr}_F(x)$, $z := \mathrm{ort}_F(x)$.

Proposition 5.1.5 *Si $e_1, ..., e_k$ est une base orthogonale de F, alors :*

$$\mathrm{pr}_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

$$\mathrm{ort}_F(x) = x - \sum_{i=1}^{k} \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i \ .$$

Retour sur la méthode de Gram-Schmidt

Si $e_1, ..., e_n$ est une base de E, on peut construire une base orthogonale $(f_1, ..., f_n)$ de E de la manière suivante :

on pose : $V_k := \langle e_1, ..., e_k \rangle$ si $0 \leq k \leq n$ et pour tout $1 \leq k \leq n$:

$$f_k := \mathrm{ort}_{V_{k-1}}(e_k)$$

$$= e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(e_k, f_i)}{(f_i, f_i)} f_i \ .$$

Remarque : la famille $\left(\frac{f_1}{(f_1,f_1)}, ..., \frac{f_n}{(f_n,f_n)}\right)$ est une base orthonormale de E.

Exemples standards :

les polynômes orthogonaux

$E = \mathbb{R}[X]$, $e_i := X^{i-1}$,

i) $(f,g) := \int_{-1}^{1} fg$: $f_{n+1} = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n$ (Legendre) ;

ii) $(f,g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$: $f_1 = 1$, $f_{n+1} = 2^{n-1} T_n$ Tchébychev I si $n \geq 1$ *i.e.* $T_n(\cos t) = \cos(nt)$; iii) $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\sqrt{1-t^2} dt$: $f_n = 2^{n-1} S_n$ Tchébychev II *i.e.* $\sin t S_n(\cos t) = \sin(nt)$.

Exemple : Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En appliquant la méthode de Gram-Schmidt, on montre qu'il existe une unique façon d'écrire

$$A = BO$$

où O est une matrice orthogonale et B une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0.

5.1.1 Distances

Soient $x, y \in E$, on pose $d(x,y) := ||x-y|| := \sqrt{(x-y, x-y)}$.

On a pour tous $x, y, z \in E$: i) $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$;
ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

On dit que d est une distance.

Si F est un sous-espace de E, on note $d(x,F) := \inf_{y \in F} ||x-y||$ la distance de x à F.

Théorème 5.1.6 *$d(x,F) = ||\mathrm{ort}_F(x)|| = ||x - \mathrm{pr}_F(x)||$. Et $\mathrm{pr}_F(x)$ est LE point de F le plus proche de x.*

Proposition 5.1.7 *Soit $e_1, ..., e_k$ une base de F. On a :*

$$d(x,F)^2 = \frac{\mathrm{dét} G(e_1, ..., e_k, x)}{\mathrm{dét} G(e_1, ..., e_k)} \quad .$$

Démonstration : Si $x \in \langle e_1, ..., e_k \rangle$, alors, $d(x,F) = 0$ et $\mathrm{dét} G(e_1, ..., e_k, x) = 0$. Si $x \notin \langle e_1, ..., e_k \rangle$, alors, on pose $e_{k+1} := x$ et $V_i := \langle e_1, ..., e_i \rangle$ pour tout i. Il existe une base (unique) orthogonale de $\langle e_1, ..., e_k, e_{k+1} \rangle$ telle que $f_i = e_i \bmod \langle e_1, ..., e_{i-1} \rangle$ pour tout $1 \leq i \leq k+1$. Si T_i est la matrice de passage de la base $e_1, ..., e_i$ de V_i dans la base $f_1, ..., f_i$, alors T_i est triangulaire supérieure avec une diagonale de 1, donc de déterminant 1. Donc :

$$G(f_1, ..., f_i) = {}^t T_i G(e_1, ..., e_i) T_i$$

donc $||f_1||^2 ... |f_i||^2 = \mathrm{dét} G(e_1, ..., e_i)$ pour tout i. En particulier :

$$||f_{k+1}||^2 = \frac{\mathrm{dét} G(e_1, ..., e_k, x)}{\mathrm{dét} G(e_1, ..., e_k)} \quad .$$

Or, $f_{k+1} = \perp_{\langle e_1, ..., e_k \rangle}(x) = \perp_F(x)$. Donc :

$$||f_{k+1}||^2 = d(x,F)^2 = \frac{\mathrm{dét} G(e_1, ..., e_k, x)}{\mathrm{dét} G(e_1, ..., e_k)} \quad .$$

q.e.d.

Volume des parallélépipèdes

Soient $a_1, ..., a_n \in E$. On note

$$P(a_1, ..., a_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \ : \ 0 \leq x_1, ..., x_n \leq 1 \right\}$$

c'est le parallélépipède défini par $(a_1, .., a_n)$. On dira que $P(a_1, ..., a_{n-1})$ est la *base* de $P(a_1, ..., a_n)$ et que $||\mathrm{ort}_{\langle a_1, ..., a_{n-1} \rangle}(a_n)||$ est sa *hauteur.*

Définition 3 *On définit par récurrence sur n le volume d'un parallélépipède défini par n vecteurs :*

$$\mathrm{vol}(P(a_1)) := ||a_1||$$

$$\mathrm{vol}(P(a_1, ..., a_n)) := \mathrm{vol}(P(a_1, ..., a_{n-1})).||\mathrm{ort}_{\langle a_1,...,a_{n-1}\rangle}(a_n)|| \ .$$

Cette définition correspond aux définitions usuelles lorsque $n = 1, 2, 3$ *(exo).*

Théorème 5.1.8

$$\mathrm{vol}(P(a_1, ..., a_n)) = \sqrt{\mathrm{d\acute{e}t} G(a_1, ..., a_n)}.$$

Soit $e_1, ..., e_n$ une base orthonormale de E. Si $a_1, ..., a_n \in E$ sont donnés par une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *i.e.* :

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

pour tout j, alors :

$$\mathrm{vol}(P(a_1, ..., a_n)) = |\mathrm{d\acute{e}t} A| \ .$$

En effet, $G(a_1, ..., a_n) = {}^t AA$.

5.1.2 Isomorphismes

Deux espaces euclidiens E_1, E_2 munis de leurs produits scalaires : $(\cdot, \cdot)_1$ et $(\cdot, \cdot)_2$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'espace vectoriel :

$$\varphi : E_1 \to E_2$$

tel que :$(\varphi(x), \varphi(y))_2 = (x, y)_1$ pour tous $x, y \in E$.

Théorème 5.1.9 *Deux espaces euclidiens de même dimension finie sont isomorphes.*

5.2 Espaces hermitiens

Un *espace hermitien* est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme hermitienne h définie positive.

Les espaces hermitiens sont les analogues complexes des espaces euclidiens.

Soit E un espace hermitien. On notera $(\cdot, \cdot)$ la forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne correspondante. On dit que $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire.

Voici un exemple standard :

$\mathbb{C}^n$ muni de $h(x) := |x_1|^2 + ... + |x_n|^2$ pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$. La forme polaire est donnée par : $(x, y) := \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$ pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$ de coordonnées x_i, y_i.

Dans un espace hermitien, on définit la *norme* d'un vecteur x par :

$$||x|| := \sqrt{(x,x)}\ .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est encore valide :

$$|(x, y)| \leq ||x||||y||$$

pour tous $x, y \in E$.

On dit qu'une base $(e_1, ..., e_n)$ de E est orthogonale si pour tous $i \neq j$, on a :

$$(e_i, e_j) = 0$$

si de plus, pour tout i, $(e_i, e_i) = 1$, on dit que la base est orthonormale.

Proposition 5.2.1 *Si E est un espace hermitien, alors E admet au moins une base orthonormale.*

Remarque : si $e_1, ..., e_n$ est une base orthonormale de E. Alors pour tous vecteurs $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n, y = y_1 e_1 + ... + y_n e_n$ de E, on a :

$$(x, y) = {}^t\overline{X} Y$$

où $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Les matrices de changement de bases entre deux bases orthonormales sont appelées *unitaires* .

Proposition 5.2.2 *Une matrice $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est unitaire si et seulement si ${}^t\overline{U} U = I_n$.*

On note $U_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices unitaires $n \times n$. *Remarque :* Les matrices unitaires forment un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. De plus , $|\mathrm{dét} U| = 1$ si $U \in U_n(\mathbb{C})$.

Exemple : Si $n = 1$, $U_1(\mathbb{C})$ est le groupe des nombres complexes de module 1.

Comme dans le cas des espaces euclidiens, si F est un sous-espace vectoriel d'un espace hermitien E, alors

$$E = F \oplus F^\perp\ .$$

Et si F a une base orthonormale $(f_1, ..., f_k)$, alors pour tout $x \in E$,

$$pr_F(x) = \sum_{i=1}^{k}(x, f_i)f_i \text{ et } \mathrm{ort}_F(x) = x - \sum_{i=1}^{k}(x, f_i)f_i$$

sont les projections de x sur F et $F^{\perp}$ relativement à la décomposition $E = F \oplus F^{\perp}$.

Proposition 5.2.3 (décomposition d'Iwasawa) *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe un unique couple U, T où U est unitaire, T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0 tel que $A = UT$.*

5.3 Réduction des matrices symétriques et des endomorphismes adjoints

Soit E un espace euclidien ou hermitien muni d'un produit scalaire : $(\cdot, \cdot)$.

5.3.1 Adjoint d'un endomorphisme

On dit que deux endomorphismes f, g de E sont *adjoints* si pour tous $x, y \in E$:

$$(*) \quad (f(x), y) = (x, g(y)) \ .$$

Proposition 5.3.1 *L'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ étant donné il existe un unique endomorphisme g de E qui vérifie $(*)$. On dit que g est l'endomorphisme adjoint de f et on le note f^*.*

Par définition, on a toujours :

$$(f(x), y) = (x, f^*(y))$$

pour tous $x, y \in E$ et tout $f \in \mathscr{L}(E)$.

On a aussi : $f^{**} = f$ si $f \in \mathscr{L}(E)$.

Si $f^* = f$, on dit que f est *autoadjoint* .

Démonstration : Soit f un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit M la matrice de f dans la base B. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. On note N la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.

On voit que $(*)$ est vérifiée si et seulement si pour tous vecteurs $X, Y \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) on a :

$$(MX)^*Y = X^*(NY)$$

ou encore

$$X^*M^*Y = X^*NY \ .$$

L'endomorphisme g est donc l'adjoint de f si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $N = M^*$. *q.e.d.*

Remarques :
— Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, alors

$$\mathrm{Mat}(f^*)_{\mathcal{B}} = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^* \ .$$

Attention, cela n'est vrai que lorsque la base est orthonormée.
— Si E est euclidien, un endomorphisme est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.
— Si E est hermitien, un endomorphisme est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est hermitienne.

5.3.2 Réduction

Soit u un endomorphisme de E. On dit que u est *normal* si $uu^* = u^*u$.
C'est le cas si u est autoadjoint ou si u est unitaire (*i.e.* $u^*u = \mathrm{Id}_E$) ou si $u^* = -u$.

Lemme 5.3.2 *Si u est normal, alors pour tout $x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.*

Lemme 5.3.3 *Si u est normal et si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.*

Théorème 5.3.4 *Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. Alors, il existe une base orthonormée de vecteurs propres de E. De plus, dans le cas hermitien, les valeurs propres sont toutes réelles.*

Version matricielle : si A est une matrice symétrique réelle (resp.hermitienne complexe), alors il existe une matrice orthogonale O (resp.une matrice U unitaire) et une matrice diagonale **réelle** *telle que :*

$$A = OD^tO = ODO^{-1}$$

resp. :

$$A = UDU^* = UDU^{-1} \ .$$

Remarque : La matrice symétrique $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Théorème 5.3.5 (des axes principaux ou diagonalisation forte) *Soit q une forme quadratique réelle sur un espace euclidien E de dimension n. Alors il existe une base orthonormale de E : $e_1, ..., e_n$ telle que :*

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2$$

pour tout $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n \in E$ (autrement dit, la base $e_1, ..., e_n$ est aussi orthogonale pour q). De plus, les λ_i sont les valeurs propres de la matrice de q dans une base orthonormale quelconque de E et le rang de q est (r, s) où r est le nombre d'indices i tels que $\lambda_i > 0$ et s le nombre d'indices i tels que $\lambda_i < 0$.

Proposition 5.3.6 *Soit u un endomorphisme adjoint. Alors les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

Corollaire 5.3.6.1 (racine carrée d'une matrice hermitienne positive) *Soit H une matrice hermitienne positive. Alors il existe une unique matrice hermitienne positive R telle que $R^2 = H$.*

Corollaire 5.3.6.2 (Décomposition polaire) *Soit A une matrice complexe inversible. Alors, il existe un unique couple (U, H) tel que U est unitaire, H hermitienne définie positive et $A = UH$.*

5.3.3 Quadriques

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Définitions : Une fonction quadratique sur E est une fonction $F : E \to \mathbb{R}$ de la forme

$$F = q + l + c$$

où :

— q est une forme quadratique non nulle sur E ;
— l est une forme linéaire sur E ;
— c est une constante réelle.

On notera $q_F := q$ la partie forme quadratique de F.

On appelle *quadrique* un sous-ensemble de E de la forme :

$$\mathscr{Q}_F := \{x \in E \ : \ F(x) = 0\}$$

où F est une fonction quadratique .

Si E est de dimension 2, on parle de *conique*.

Exemples : les cercles, les ellipses, les hyperboles, les paraboles.

Si $F = q + l + C$ avec q une forme quadratique, l une forme linéaire et C une constante, on définit *l'homogénisé* de F par :

$$H_F(x, t) := q(x) + l(x)t + Ct^2$$

pour tout $(x, t) \in E \times \mathbb{R}$. La fonction H_F est une forme quadratique sur $E \times \mathbb{R}$ *(exo)*.

Remarque : on a : $H_F(x, t) = t^2F(\frac{x}{t})$ si $t \neq 0$.

Si une quadrique $\mathscr{Q}$ de E peut être définie par une fonction quadratique F telle que la forme quadratique H_F est non dégénérée, alors on dit que $\mathscr{Q}$ est une *quadrique non dégénérée.*

Exemple : la conique d'équation $x^2 - y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$ est non dégénérée car si on pose $F(x,y) := x^2 - y$, alors $H_F(x,y,t) = x^2 - yt$ et H_F est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^3$ (en effet, sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ qui est inversible).

Remarque : une quadrique, même non dégénérée, peut-être vide : $x^2 + y^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^2$.

Changement de variables

Proposition 5.3.7 *Soit F une fonction quadratique sur E. Soient $o \in E$ et $u_1, ..., u_n$ une base de E. Si on pose $G(x_1, ..., x_n) := F(o + x_1u_1 + ... + x_nu_n)$ alors, on obtient une fonction quadratique G sur $\mathbb{R}^n$ et les formes quadratiques*

— q_G et q_F d'une part,

— H_F et H_G d'autre part, ont la même signature si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

En particulier, si H_F est non dégénérée, alors H_G aussi et la quadrique de $\mathbb{R}^n$ d'équation $G(x_1, ..., x_n) = 0$ est aussi non dégénérée.

Démonstration : Notons l la partie linéaire de F et c sa partie constante :

$$F = q_F + l + c$$

donc si $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$, alors on a :

$$G(x_1, ..., x_n) = F(o + x_1u_1 + ... + x_nu_n)$$

$$= q_F(o + x_1u_1 + ... + x_nu_n) + l(o + x_1u_1 + ... + x_nu_n) + c$$

$$= q_F(o) + 2B(o, x_1u_1 + ... + x_nu_n) + q_F(x_1u_1 + ... + x_nu_n) + l(o) + l(x_1u_1 + ... + x_nu_n) + c$$

(où B est la forme polaire de q_F)

$$= F(o) + 2B(o, x_1u_1 + ... + x_nu_n) + l(x_1u_1 + ... + x_nu_n) + q_F(x_1u_1 + ... + x_nu_n)\,.$$

Donc G est une fonction quadratique avec pour partie quadratique :

$$q_G(x_1, ..., x_n) := q_F(x_1u_1 + ... + x_nu_n)$$

pour partie linéaire :

$$2B(o, x_1u_1 + ... + x_nu_n) + l(x_1u_1 + ... + x_nu_n)$$

et pour constante $F(o)$.

Donc la matrice de q_G dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la matrice de q_F dans la base $u_1, ..., u_n$. Donc q_F et q_G ont la même signature.

Si $t \neq 0$, on a :

$$H_G(x_1, ..., x_n, t) = t^2 G(\frac{x_1}{t}, ..., \frac{x_n}{t})$$

$$= t^2 F(o + \frac{x_1}{t} u_1 + ... + \frac{x_n}{t} u_n)$$

$$= t^2 F(\frac{to + x_1 u_1 + ... + x_n u_n}{t})$$

$$= H_F(to + x_1 u_1 + ... + x_n u_n, t)$$

$$= H_F(x_1(u_1, 0) + ... + x_n(u_n, 0) + t(o, 1)) \ .$$

Or, les vecteurs $(u_1, 0), ..., (u_n, 0), (o, 1)$ forment une base de $E \times \mathbb{R}$ *(exo)*. Donc la matrice de la forme quadratique H_G dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est aussi la matrice de H_F dans la base $(u_1, 0), ..., (u_n, 0), (o, 1)$ de $E \times \mathbb{R}$. Donc les formes quadratiques H_F et H_G ont la même signature. *q.e.d.*

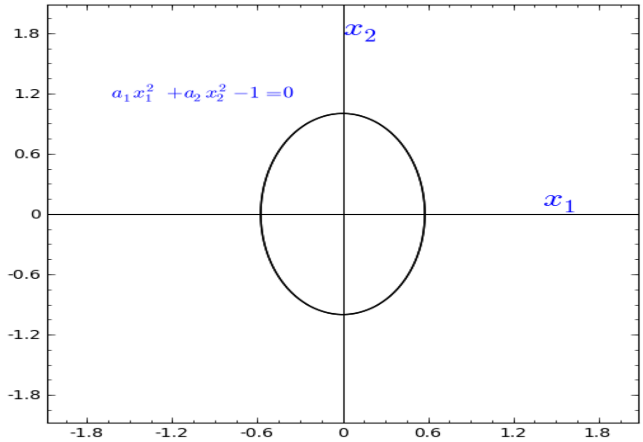


FIGURE 5.1 – ellipse

5.3.4 Classification des coniques

Exemples de coniques non dégénérées

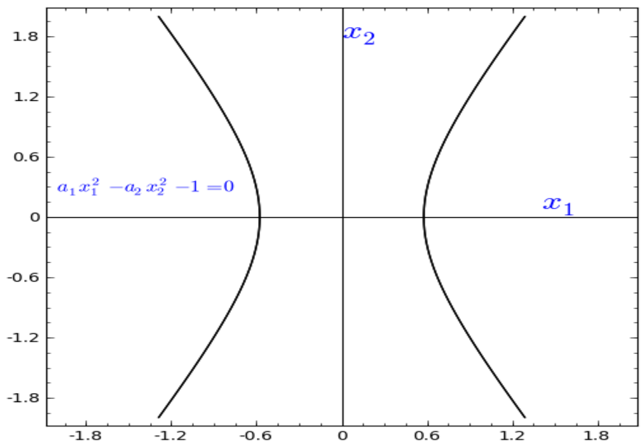


FIGURE 5.2 – hyperbole

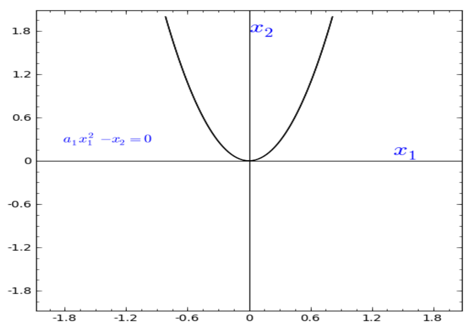


FIGURE 5.3 – parabole

— l'ellipse d'équation $F(x_1, x_2) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - 1$ où $a_1, a_2 > 0$,
— l'hyperbole déquation $F(x_1, x_2) = a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - 1$ où $a_1, a_2 > 0$,
— la parabole déquation $F(x_1, x_2) = a_1x_1^2 - x_2$ où $a_1 > 0$

sont des coniques non dégénérées (on a $H_F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - x_3^2$ de signature $(2, 1)$ dans le premier cas, $H_F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - x_3^2$ de signature $(1, 2)$ dans le deuxième cas et $H_F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 - x_2x_3$, de signature $(2, 1)$, dans le dernier cas. Nous allons voir qu'à changement de repère orthonormal près ce sont les seules.

Théorème 5.3.8 *Soit $\mathscr{C}$ une conique dans $\mathbb{R}^2$ d'équation quadratique :*

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \ .$$

On suppose que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$ *est inversible (c-à-d la forme quadratique H_F est non dégénérée) donc que $\mathscr{C}$ est non dégénérée.*

Alors soit $\mathscr{C}$ est vide soit il existe $o \in \mathbb{R}^2$, une base orthonormée u_1, u_2 de $\mathbb{R}^2$ et $a_1, a_2 > 0$ tels que :

$$(I) \ \ o + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathscr{C} \Leftrightarrow a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = 1$$

ou

$$(II) \ \ o + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathscr{C} \Leftrightarrow a_1x_1^2 - a_2x_2^2 = 1$$

ou

$$(III) \ \ o + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathscr{C} \Leftrightarrow a_1x_1^2 - x_2 = 0 \ .$$

On dit que les équations à droite du signe $\Leftrightarrow$ sont les équations réduites de la conique $\mathscr{C}$.

On dit que les droites $\mathbb{R}u_1$ et $\mathbb{R}u_2$ sont des *directions principales* de $\mathscr{C}$. Ces directions sont uniques si $\mathscr{C}$ n'est pas un cercle (*i.e.* $a_1 \neq a_2$), ce sont les droites propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ de la forme quadratique $q_F = ax^2 + 2bxy + cy^2$ (dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$). Dans les cas (I) et (II), on dit que o est le centre de la conique et on appelle les droites $o + \mathbb{R}u_i$ des (les (si $a_1 \neq a_2$)) *axes principaux* de $\mathscr{C}$.

Démonstration : Soit u_1, u_2 une base orthonormale de vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres λ_1, λ_2.

On a alors : $q_F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

On a donc, en posant $l(x,y) := 2dx + 2ey$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + l(x_1u_1 + x_2u_2) + f$$
$$= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + f$$

avec $\alpha_i = l(u_i)$.

Si $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2 \neq 0}$, on a :

$$F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1(x_1 + \frac{\alpha_1}{2\lambda_1})^2 + \lambda_2(x_2 + \frac{\alpha_2}{2\lambda_2})^2 + c'$$

pour une certaine constante c'. Si on pose $o := -\frac{\alpha_1}{2\lambda_1}u_1 - \frac{\alpha_2}{2\lambda_2}u_2$, on trouve :

$$F(o + x_1u_1 + x_2u_2) = F((x_1 - \frac{\alpha_1}{2\lambda_1})u_1 + (x_2 - \frac{\alpha_2}{2\lambda_2})u_2)$$
$$= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + c'$$

si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. En particulier, $c' = F(o)$.

Or, d'après la proposition5.3.7, si $G(x_1, x_2) := F(o + x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + c'$, on a : H_G qui est non dégénérée car H_F est non dégénérée. Or,

$$H_G(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + c' x_3^2$$

donc $c' = F(o) \neq 0$.

Donc :

$$o + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + F(o) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-\lambda_1}{F(o)}x_1^2 + \frac{-\lambda_2}{F(o)}x_2^2 = 1 \quad (*) \ .$$

Si $\frac{-\lambda_1}{F(o)}, \frac{-\lambda_2}{F(o)} > 0$, on pose $a_i = \frac{-\lambda_i}{F(o)}$. Si $\frac{-\lambda_1}{F(o)} > 0$, $\frac{-\lambda_2}{F(o)} < 0$, on pose $a_1 := \frac{-\lambda_1}{F(o)}$ et $a_2 := \frac{\lambda_2}{F(o)} > 0$. Si $\frac{-\lambda_1}{F(o)} < 0$, $\frac{-\lambda_2}{F(o)} > 0$, on échange u_1 et u_2 et on est ramené au cas précédent. Enfin si $\frac{-\lambda_1}{F(o)}, \frac{-\lambda_2}{F(o)} < 0$, l'équation $(*)$ n'a pas de solution donc $\mathscr{C} = \emptyset$.

Remarque : Comment trouver o ? *Réponse :* le point o est l'unique point de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie le système :

$$\begin{cases} \partial F_x(o) = 0 \\ \partial F_y(o) = 0 \end{cases} .$$

En effet, d'après la formule de Taylor (*cf.* le cours de math-IV-analyse), on a :

$$F(o + v) = q_F(v) + \langle \begin{pmatrix} \partial F_x(o) \\ \partial F_y(o) \end{pmatrix}, v \rangle + F(o)$$

pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^2$. Donc le point o vérifie :

$$\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(o) \\ \partial F_y(o) \end{pmatrix}, x_1u_1 + x_2u_2 \rangle = 0$$

pour tous $x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathbb{R}^2$ donc :

$$\begin{cases} \partial F_x(o) = 0 \\ \partial F_y(o) = 0 \end{cases} .$$

De plus, on peut vérifier que ce système a une seule solution.

Si $\boldsymbol{\lambda_1 \neq 0}$ et $\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$:

Soit (u_1, u_2) une base de vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres λ_1, 0.

Comme précédemment, on a :

$$F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + f$$

pour certaines constantes réelles α_1, α_2. Comme $\lambda_1 \neq 0$, on a :

$$F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1 (x_1 + \frac{\alpha_1}{2\lambda_1})^2 + \alpha_2 x_2 + c'$$

pour une certaine constante c'.

On pose $o' := -\frac{\alpha_1}{2\lambda_1} u_1$ et on trouve

$$G(x_1, x_2) := F(o' + x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2 + c' \ .$$

Or, H_F est non dégénérée donc H_G aussi. Mais :

$$H_G(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2 x_3 + c' x_3^2$$

qui est une forme quadratique de matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{2} \\ 0 & \frac{\alpha_2}{2} & c' \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cette matrice doit être inversible donc $\alpha_2 \neq 0$.

On pose alors :

$$o := -\frac{\alpha_1}{2\lambda_1} u_1 - \frac{c'}{\alpha_2} u_2 \ .$$

On obtient alors :

$$F(o + x_1u_1 + x_2u_2) = F((x_1 - \frac{\alpha_1}{2\lambda_1})u_1 + (x_2 - \frac{c'}{\alpha_2})u_2)$$
$$= \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2 \ .$$

Par conséquent, on a :

$$o + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathscr{C} \Leftrightarrow F(o + x_1u_1 + x_2u_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-\lambda_1}{\alpha_2} x_1^2 - x_2 = 0 \ .$$

Quitte à changer u_2 en $-u_2$, on supposera que $\frac{-\lambda_1}{\alpha_2} > 0$. On pose alors $a_1 := \frac{-\lambda_1}{\alpha_2}$.

Remarque : Comment calculer o dans ce cas ? Réponse : le point o est l'unique point de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$F(o) = 0 \text{ et } (\partial_x F(o), \partial_y F(o)).u_1 = 0$$

(exo).

De plus, pour ce point $o \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$F(o + x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2$$

où $\alpha_2 = (\partial_x F(o), \partial_y F(o)).u_2$.

q.e.d.

Pour résumer, on a le tableau suivant pour une conique non dégénérée d'équation $F(x, y) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$:

$\mathrm{sgn}(q_F)$	nature de la conique
$(2, 0)$	ellipse si sgn(H_F)=(2,1) , $\emptyset$ si sgn(H_F)=(3,0)
$(1, 1)$	hyperbole
$(1, 0)$	parabole

Exemple : On considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation :

$$x^2 + xy + y^2 + 4x + 3y + 4 = 0 \ .$$

Pour trouver $o = (x_0, y_0)$, on résout le système :

$$\begin{cases} \partial_x F(o) = 0 \\ \partial_y F(o) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + y_0 + 4 = 0 \\ x_0 + 2y_0 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = -\frac{5}{3}\,,\ y_0 = -\frac{2}{3}\ .$$

On a de plus, $q_F(x,y) = x^2+xy+y^2$. On cherche donc les valeurs propres λ_1, λ_2 de la matrice

$$[q_F] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\ .$$

On trouve : $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. Si (u_1, u_2) est une base orthonormale de vecteurs propres associés à λ_1, λ_2, alors on trouve :

$$F(o + x_1u_1 + x_2u_2) = F(o) + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2\ .$$

Donc :

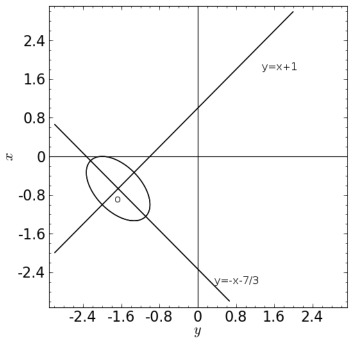
$$o + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathscr{C} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{9}{2}x_2^2 = 1\ .$$

Donc $\mathscr{C}$ est une ellipse de centre $(-5/3, -2/3)$ et dont les axes principaux sont les droites

$$o + \mathbb{R}u_1 = (y = -x - 7/3)$$

$$o + \mathbb{R}u_2 = (y = x + 1)$$



5.3.5 Classification des quadriques en dimension trois

Comme pour les coniques on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.3.9 *Soient $a, b, c, d, e, f, g, p, q, r$ des réels. On considère la quadrique $\mathcal{Q}$ d'équation :*

$$F(x, y, z) := ax^2 + by^2 + cz^2 + 2exy + 2fxz + 2gyz + 2px + 2qy + 2rz + d = 0$$

dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que la matrice :

$$[H_F] = \begin{pmatrix} a & e & f & p \\ e & b & g & q \\ f & g & c & r \\ p & q & r & d \end{pmatrix}$$

est inversible (donc $\mathcal{Q}$ est non dégénérée). Alors, soit $\mathcal{Q}$ est vide soit il existe $a_1, a_2, a_3 > 0$, u_1, u_2, u_3 une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et $o \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$o + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 1$$

(ellipsoïde) ou

$$o + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 \in \mathscr{Q} \Leftrightarrow a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - a_3x_3^2 = 1$$

(hyperboloïde à une nappe) ou

$$o + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 \in \mathscr{Q} \Leftrightarrow a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - a_3x_3^2 = 1$$

(hyperboloïde à deux nappes) ou

$$o + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 \in \mathscr{Q} \Leftrightarrow a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - x_3 = 0$$

(paraboloïde elliptique) ou

$$o + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 \in \mathscr{Q} \Leftrightarrow a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - x_3 = 0$$

(paraboloïde hyperbolique).

Chapitre 6

Formes bilinéaires alternées

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique $\neq 2$ (*i.e.* $\forall\, x \in \mathbb{K},\ x + x = 0 \Rightarrow x = 0$).

6.1 Rappels

Définition 4 *$\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est bilinéaire alternée si φ est bilinéaire et $\varphi(x,x) = 0$ pour tout $x \in E$.*

Exemple : dét : $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto xy' - x'y$ est bilinéaire alternée.

Remarque : Alterné $\Rightarrow$ antisymétrique. La réciproque vraie en caractéristique $\neq 2$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire alternée.

*

Le *noyau* de φ est le sous-espace :

$$\ker \varphi := \{x \in E \ :\ \forall\, y \in E,\ \varphi(x,y) = 0\}$$

Si $\ker \varphi = 0$, on dit que φ est non dégénérée.

Exercice 12 Vérifier que le déterminant est non dégénéré.

Si $e := (e_1, ..., e_n)$ est une base de E, la matrice de φ dans la base (e) est la matrice :

$$\mathrm{Mat}_e(\varphi) := (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}\ .$$

Si $x = x_1 e_1 + .. + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + ... + y_n e_n$ alors :

$$\varphi(x,y) = {}^t XAY$$

où X et Y sont les vecteurs colonnes formés des coordonnées de x et y.

Exemple : dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, le déterminant a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Proposition 6.1.1 *Une forme bilinéaire est non dégénérée si et seulement si sa matrice dans une base quelconque de E est inversible.*

Exercice 13 Montrer qu'en dimension 3 il n'existe pas de forme bilinéaire alternée non dégénérée.

Formule de changement de bases : soient e' une autre base de E et P la matrice de passage de e dans e'. Si on note $A := \mathrm{Mat}_e(\varphi)$ et $A' := \mathrm{Mat}_{e'}(\varphi)$, alors on a la relation :

$$A' = {}^tPAP \ .$$

En particulier, le rang de la matrice de φ dans une base de E ne dépend pas de la base choisi. Ce rang commun est le rang de φ.

6.2 Classification

Théorème 6.2.1 *Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire alternée. On suppose que E est de dimension finie. Alors le rang de φ est pair, disons $2p \leq n$, et il existe une base $e_1, ..., e_n$ de E telle que :*

$$\varphi(e_{2k-1}, e_{2k}) = 1$$

pour tout $1 \leq k \leq p$ et

$$\varphi(e_i, e_j) = 0$$

dans tous les autres cas où $i < j$.

En particulier, si φ est non dégénérée, la dimension de E est paire.

Dans le cas où φ est non dégénérée, $n = 2p$ et une base comme dans le théorème est appelée base *symplectique*. Dans une telle base, la matrice de φ est :

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Version matricielle du théorème : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice antisymétrique *i.e.* :

$${}^tA = -A \ ,$$

alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & -1 & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} . $$

En particulier, le rang de la matrice A est un entier pair.

6.3 Le Pfaffien

Toutes les matrices antisymétriques carrées de taille impaire sont de déterminant 0 *(exo)*.

Le déterminant d'une matrice antisymétrique carrée de taille paire est un carré. Plus précisément :

Théorème 6.3.1 *Il existe un unique polynôme en les variables $t_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq 2n$ et à coefficients entiers noté* Pf *tel que :*

$$ \mathrm{Pf}(A)^2 = \mathrm{dét} A $$

pour toute matrice antisymétrique carrée A de taille $2n$ et

$$ \mathrm{Pf}(J) = 1 \ . $$

Démonstration : Soit

$$ A := \begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots \\ -t_{1,2} & 0 & t_{2,3} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{K}) $$

où $\mathbf{K} := \mathbb{Q}(t_{1,2}, t_{1,3}, ..., t_{2n-1,2n})$, le corps des fractions rationnelles en les variables $t_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq 2n$.

Le déterminant de A est un polynôme en les $t_{i,j}$. Si on spécialise les variables $t_{i,j}$ en les entrées de la matrice J, on trouve la valeur $\mathrm{dét} J = 1$. Donc $\mathrm{dét} A$ est un polynôme non nul et la matrice A est de rang $2n$ (inversible dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbf{K})$). En particulier, il existe $P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{K})$ tel que :

$$ {}^tPAP = J \ . $$

On pose $f := \text{dét} P^{-1}$. A priori $f \in \mathbf{K}$ est une fraction rationnelle, mais nous allons montrer que f est un polynôme en les $t_{i,j}$.

En effet, $f^2 = \text{dét} A \in \mathbb{Q}[t_{i,j} \ : \ 1 \leq i < j \leq 2n]$.

Or on a le :

Lemme 6.3.2 *Soit $f \in \mathbb{K}(t)$ une fraction rationnelle en t telle que $f^2 \in \mathbb{K}[t]$ est un polynôme. Alors $f \in \mathbb{K}[t]$ est aussi un polynôme.*

Donc, f est un polynôme en chaque variable $t_{i,j}$. Donc, pour chaque variable $t_{i,j}$, les dérivées partielles :

$$\frac{\partial^N f}{\partial t_{i,j}^N}$$

sont nulles pour N assez grand. Donc f est un polynôme en toutes les variables $t_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq 2n$.

De même on peut montrer que tous les coefficients de f sont entiers.

On peut donc dans f spécialiser chaque variable $t_{i,j}$ en une valeur appartenant à $\mathbb{K}$. En particulier $f(J) \in \mathbb{K}$ et $f(J)^2 = \text{dét} J = 1$. Donc $f(J) = \pm 1$. On pose alors $\text{Pf}(A) := f(A)$ si $f(J) = 1$ et $\text{Pf}(A) := -f(A)$ si $f(J) = -1$.

On a bien : $\text{Pf}(A)^2 = \text{dét} A$ pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ antisymétrique et $\text{Pf}(J) = 1$.

q.e.d.

Propriétés :

— si $2n = 2$:

$$\text{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a \ ;$$

— si $2n = 4$:

$$\text{Pf}\begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ -t_{1,2} & 0 & t_{2,3} & t_{2,4} \\ -t_{1,3} & -t_{2,3} & 0 & t_{3,4} \\ -t_{1,4} & -t_{2,4} & -t_{3,4} & 0 \end{pmatrix} = t_{1,2}t_{3,4} + t_{1,4}t_{2,3} - t_{1,3}t_{2,4} \ ;$$

— Pour toute matrice antisymétrique B, pour toute matrice C,

$$\text{Pf}({}^tCBC) = \text{dét} C \, \text{Pf}(B) \ ;$$

—

$$\text{Pf}({}^tA) = (-1)^n \text{Pf}(A) \ ;$$

— le polynôme Pf est homogène de degré n est de degré 1 en chaque variable $t_{i,j}$.

—
$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_n \\ & & & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 ... \lambda_n \ .$$

Formule de Laplace

On peut, pour calculer le déterminant d'une matrice développer, simultanément, par rapport à plusieurs lignes ; si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\text{dét} A = \sum_{A'} \epsilon(A') \text{dét} A' \text{dét} A''$$

où :

— A' décrit les matrices extraites de A formées des r premières lignes de A et de r colonnes $j_1 < j_2 < ... < j_r$,

— A'' est, pour chaque A', la matrice extraite de A formée des $n - r$ lignes et $n - r$ colonnes restantes,

— $\epsilon(A') := (-1)^\nu$ où ν est le nombre de transpositions de colonnes (*i.e.* échanges de deux colonnes) nécessaires pour amener les colonnes $j_1, ..., j_r$ en position $1, ..., r$ sans changer l'ordre des autres colonnes, concrètement :

$$\nu = j_1 - 1 + ... + j_r - r = j_1 + ... + j_r - \frac{r(r+1)}{2} \ .$$

Par exemple, si $r = 1$, c'est la formule du développement du déterminant par rapport à la première ligne.

6.4 Groupe symplectique

Soit $\mathbb{K}^{2n}$ muni de sa base canonique $e_1, ..., e_{2n}$ et de sa forme bilinéaire alternée standard :

$$B(e_{2i-1}, e_{2i}) = 1 \text{ et } B(e_i, e_j) = 0$$

pour les autres vecteurs e_i, e_j tels que $1 \leq i < j \leq 2n$.

Définition 5 *Une matrice symplectique est une matrice de passage d'une base symplectique dans une autre* i.e. *:* $g \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ *est symplectique si*

$$^t g J g = J \ .$$

L'ensemble des matrices symplectiques est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K})$; on le note $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{K})$.

Propriétés : $\mathrm{Sp}_2 = \mathrm{SL}_2$, $A \in \mathrm{Sp}_{2n} \Rightarrow {}^t A \in \mathrm{Sp}_{2n}$, toute matrice symplectique est de déterminant 1.

Chapitre 7

Les quaternions

Rappelons que :

$$\mathbb{C} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \right\} \quad a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ .$$

Sur le même modèle, on peut construire l'algèbre des quaternions à partir de $\mathbb{C}$.

7.1 Définitions

Définition 6 *Soit*

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \right\} \ .$$

Exemple : Par exemple :

$$1 := I_2,\ I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \ .$$

Proposition 7.1.1 $\mathbb{H}$ *est une sous-*$\mathbb{R}-$*algèbre de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ i.e. *:* $I_2 \in \mathbb{H}$ *et* $\mathbb{H}$ *est stable par addition, par multiplication par un scalaire réel et par multiplication.*

Démonstration : Pour la stabilité par multiplication, on vérifie que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ -\overline{b'} & \overline{a'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - b\overline{b'} & ab' + \overline{a'}b \\ \overline{-ab' + \overline{a'}b} & \overline{aa' - b\overline{b'}} \end{pmatrix} \ .$$

q.e.d.

Exercice 14 Vérifier que

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}J \oplus \mathbb{R}K \ .$$

Table de mulitplications :

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1$$

$$IJ = -JI = K \ , \ JK = -KJ = I \ , \ KI = -IK = J$$

$$IJK = -1$$

(exo)

Remarque : Si $s \in \mathbb{R}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, alors on pose :

$$[s, \vec{v}] := s + v_1 I + v_2 J + v_3 K \in \mathbb{H} \ .$$

On a alors pour $s, t \in \mathbb{R}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$:

$$[s, \vec{v}][t, \vec{w}] = [st - \vec{v}.\vec{w}, t\vec{v} + s\vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}] \ .$$

Définition 7 *On appelle quaternions purs les quaternions de la forme :*

$$xI + yJ + zK \ , \ x, y, z \in \mathbb{R}$$

et on note $\mathbb{H}'$ les sous-espace des quaternions purs.

On identifiera $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}I_2 \subseteq \mathbb{H}$.

Exercice 15 Pour tout $q \in \mathbb{H}$:

$$q \in \mathbb{R} \Leftrightarrow q^2 \in \mathbb{R}_+$$

$$q \in \mathbb{H}' \Leftrightarrow q^2 \in \mathbb{R}_-$$

Remarque : Pour tout $q = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$, dét$q = |a|^2 + |b|^2$. Donc, $q \neq 0 \Rightarrow q$ inversible dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Proposition 7.1.2 *L'algèbre $\mathbb{H}$ est une algèbre à division* i.e. *tout $q \in \mathbb{H}$ non nul est inversible dans $\mathbb{H}$. De plus, le centre de $\mathbb{H}$, c-à-d l'ensemble des $x \in \mathbb{H}$ tels que $xq = qx$ pour tout $q \in \mathbb{H}$, est $\mathbb{R}$.*

Démonstration : Soit $0 \neq q = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$. Alors,

$$q^{-1} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \ .$$

Soit $x = a + bI + cJ + dK \in \mathbb{H}$, alors si x est dans le centre de $\mathbb{H}$, on a en particulier :

$$xI = Ix \text{ et } xJ = Jx$$

$$\Rightarrow b = c = d = 0 \ .$$

La réciproque est clair : si $x \in \mathbb{R}$, alors $\forall\, q \in \mathbb{H}$, $xq = qx$. *q.e.d.*

Remarque : Dans $\mathbb{H}$, l'équation $X^2 + 1 = 0$ a une infinité de solutions, parmi lesquelles : I, J, K.

Exercice 16 Vérifier que $Q_8 := \{\pm I_1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{H} \setminus \{0\}$.

7.2 Norme

Pour tout $q \in \mathbb{H}$, on pose :

$$q^* := {}^t\overline{q} \ .$$

Propriétés :

$$\forall\, q_1, q_2 \in \mathbb{H},\ (q_1 q_2)^* = q_2^* q_1^*$$

$$\forall\, q \in \mathbb{H},\ qq^* = q^* q = \text{dét}(q) I_2 \in \mathbb{R}_+ I_2$$

$$\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R},\ (a + bI + cJ + dK)^* = a - bI - cJ - dK \ .$$

Définition 8 *On pose pour tout $q \in \mathbb{H}$, $||q|| := \sqrt{qq^*}$.*

Proposition 7.2.1 *L'application :*

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}_+ \ (q, q') \mapsto \langle q, q' \rangle := \frac{1}{2}(qq'^* + q'q^*)$$

est un produit scalaire.

Démonstration : Si $q = a + bI + cJ + dK$, $q' = a' + b'I + c'J + d'K$ avec $a, a', b, b', c, c', d, d'$, alors : $\langle q, q' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$; c'est la formule du produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^4$. *q.e.d.*

On remarque :

$$\forall\, q, q' \in \mathbb{H}, ||qq'|| = ||q||||q'||$$

donc :

$$G := S^3 := SU_2 := \{q \in \mathbb{H} \;:\; ||q|| = 1\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{H} \setminus \{0\}$.

Ce groupe joue vis-à-vis des rotations de $SO_3(\mathbb{R})$ le même rôle que le groupe S^1 vis-à-vis de $SO_2(\mathbb{R})$.

7.3 Lien avec les rotations

Pour tout $0 \neq q \in \mathbb{H}$, on pose :

$$s_q : \mathbb{H}' \to \mathbb{H}' \; y \mapsto s_q(y) := qyq^{-1}$$

(vérifier que si $y \in \mathbb{H}'$, $s_q(y) \in \mathbb{H}'$).

Pour tout $0 \neq q \in \mathbb{H}$, on notera S_q la matrice de s_q dans la base I, J, K de $\mathbb{H}'$.

Remarque : La base I, J, K de $\mathbb{H}'$ est orthonormale.

Lemme 7.3.1 *Si $s = s_1 I + s_2 J + s_3 K \in \mathbb{H}'$, avec $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$ et $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$, alors il existe $g \in S^3$ tel que :*

$$s_g(I) = s \;.$$

Démonstration : Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$s_1 = \cos\alpha,\; s_2 = \sin\alpha\cos\beta,\; s_3 = \sin\alpha\sin\beta \;.$$

On pose alors :

$$g = \cos\xi I + \sin\xi\cos\eta J + \sin\xi\sin\eta K$$

où $\xi := -\frac{\alpha}{2}$, $\eta = \beta$. On a bien : $s_g(I) = s$. *q.e.d.*

Théorème 7.3.2 *Pour tout $q \in S^3$, $S_q \in SO_3(\mathbb{R})$. De plus l'application :*

$$S^3 \to SO_3(\mathbb{R}) \; q \mapsto S_q$$

est un morphisme surjectif de groupes de noyau : ± 1 i.e. *:*

$$\forall\, q, q' \in S^3,\; S_{qq'} = S_q S_{q'}$$

$$S_q = S_{q'} \Leftrightarrow q' = \pm q$$

et toute rotation $R \in SO_3(\mathbb{R})$ est de la forme $R = S_q$ pour un certain $q \in S^3$.

Démonstration : On a bien un morphisme de groupes :

Soient $q, q' \in S^3$. Alors :

$$\forall\, y \in \mathbb{H}',\ s_q s_{q'}(y) = qq'yq'^{-1}q^{-1} = (qq')y(qq')^{-1} = s_{qq'}(y)\ .$$

Donc $s_q s_{q'} = s_{qq'}$ d'où : $S_q S_{q'} = S_{qq'}$.

On arrive bien dans $O_3(\mathbb{R})$ ...

De plus :

$$\forall\, y \in \mathbb{H}',\ ||s_q(y)|| = ||qyq^{-1}|| = ||q||\,||y||\,||q^{-1}|| = ||y||$$

donc $S_q \in O_3(\mathbb{R})$ pour tout $q \in S^3$.

... plus précisément dans $SO_3(\mathbb{R})$:

Nous allons voir que les S_q sont en fait des rotations.

On commence par un cas particulier :

Si $q = a + bI \in S^3$, avec $b \geq 0$, alors on peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a = \cos\frac{\theta}{2} \text{ et } b = \sin\frac{\theta}{2}\ .$$

On vérifie alors que :

$$S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R})\ .$$

Si q est quelconque ...

Alors : $q = a + p$ où $p \in \mathbb{H}'$. On a alors : $1 = a^2 + ||p||^2$. Si $p = 0$, alors $S_q = I_3 \in SO_3$. Sinon, $\frac{p}{||p||} \in \mathbb{H}'$ et d'après le lemme, il existe $g \in S^3$ tel que :

$$s_g(I) = gIg^{-1} = \frac{p}{||p||}\ .$$

On a alors :

$$s_g(a + ||p||I) = q$$

(exo).

Soit $r := a + ||p||I$. On a donc : $grg^{-1} = q$ d'où :

$$S_q = S_g S_r S_g^{-1}$$

or $S_r \in SO_3(\mathbb{R})$ d'après la première partie de la démonstration donc $S_q \in SO_3(\mathbb{R})$ (car de déterminant 1).

Il reste à montrer la surjectivité :

Soit $R \in SO_3(\mathbb{R})$. Il existe un vecteur propre $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ de poids 1 de R.D'après le lemme, il existe $g \in S^3$ tel que : $s_g(I) = v_1 I + v_2 J + v_3 K$. Mais alors :

$$S_g^{-1} R S_g \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Donc, comme $S_g^{-1} R S_g \in SO_3(\mathbb{R})$, on a :

$$S_g^{-1} R S_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Donc si on pose :

$$r := \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} I$$

on a :

$$S_g^{-1} R S_g = S_r \Leftrightarrow R = S_g S_r S_g^{-1}$$
$$\Leftrightarrow R = S_{grg^{-1}}$$

d'où la surjectivité.

Pour finir le noyau est $\{\pm 1\}$ *:*

Si $S_q = I_3$ alors :

$$\forall\, y \in \mathbb{H}',\ s_q(y) = y$$
$$\Leftrightarrow \forall\, y \in \mathbb{H}',\ qyq^{-1} = y \Leftrightarrow qy = yq$$
$$\Leftrightarrow \forall\, y \in \mathbb{H},\ qy = yq$$
$$\Leftrightarrow q \in \mathbb{R} \ .$$

Si $q \in S^3$, alors $||q|| = |q| = 1 \Rightarrow q = \pm 1$.

q.e.d.

Exercice 17 Soit $q \in S^3$. Si $q = \pm 1$, alors $S_q = I_3$. Sinon, $q = a + p$ avec $a \in \mathbb{R}$, $0 \neq p \in \mathbb{H}'$ et $a^2 + ||p||^2 = 1$. Mais alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a = \cos\frac{\theta}{2} \text{ et } ||p|| = \sin\frac{\theta}{2} \ .$$

Posons aussi $\vec{p} := \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ si $p = p_1 I + p_2 J + p_3 K$. Avec ces notations, S_q est la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{p}$ et d'angle θ.

Index