Université Lyon I

Agrég. blanche d'algèbre nº5

février 2019 (sujet de 2012)

**Avertissement**

Les calculatrices et documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Le but de ce problème est d'étudier le nombre de points à coordonnées entières contenus dans certaines parties de $\mathbf{R}^d$.

Les parties **I**, **II** et **III** du problème sont indépendantes les unes des autres.

Le sigle ♦ signale l'introduction dans le texte d'une définition, d'une hypothèse, d'une notation ou d'un rappel.

## Notations

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbf{Q}$ le corps des rationnels, $\mathbf{R}$ celui des nombres réels et $\mathbf{C}$ celui des complexes.

Pour tout nombre réel $x$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière. Si $X$ est un ensemble fini, $\mathrm{Card}(X)$ désigne son cardinal. Si $X$ et $Y$ sont des ensembles, on note

$$X - Y = \{ x \in X \mid x \notin Y \}.$$

Étant donné une partie $X$ de $\mathbf{R}^d$ et un nombre réel $\lambda$, on note

$$\lambda X = \{ y \in \mathbf{R}^d \mid \exists x \in X, y = \lambda x \}.$$

♦ Une application $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ sera dite *polynomiale* s'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[T]$ tel que

$$f(n) = P(n)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$.

♦ Une application $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ sera dite *quasi-polynomiale* s'il existe un entier $N$ strictement positif et des polynômes $P_0, \ldots, P_{N-1} \in \mathbf{C}[T]$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait

$$f(n) = P_{r_N(n)}(n)$$

où $r_N(n)$ désigne le reste de la division euclidienne de $n$ par $N$.

## Partie I

### Un premier cas

Soit $d$ un entier strictement positif et soient $m_1, \ldots, m_d$ des entiers strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$u_n = \mathrm{Card}(\{(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbf{N}^d \mid \sum_{i=1}^{d} m_i k_i = n\})$$

et $v_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

**1.** Démontrer que la somme et le produit de deux fonctions quasi-polynomiales sont des fonctions quasi-polynomiales.

**2.** **(a)** Déterminer la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans le cas où $d = 1$.

**(b)** L'application $n \mapsto v_n$ est-elle quasi-polynomiale dans ce cas ?

**3.** Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, on pose $U_i = \sum_{k\in\mathbf{N}} T^{km_i}$ et on définit la série formelle

$$U = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n T^n \in \mathbf{Z}[[T]],$$

où les $u_n$ ont été définis en début de partie.

**(a)** Écrire $U$ à l'aide des séries formelles $U_i$.

**(b)** Déterminer le produit $U \times \prod_{i=1}^{d}(1 - T^{m_i})$.

**4.** On définit la série formelle $V = \sum_{n\in\mathbf{N}} v_n T^n$. Trouver une relation entre les séries formelles $V$ et $U$.

♦ La dérivée d'une série formelle $F = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n T^n$ est la série formelle $F' = \sum_{n\geqslant 1} n a_n T^{n-1}$. On pourra utiliser sans preuve la formule $(F_1F_2)' = F_1'F_2 + F_1F_2'$ pour des séries formelles $F_1$ et $F_2$. Les dérivées successives d'une série formelle $F$ sont obtenues en posant $F^{(0)} = F$ et en définissant $F^{(k+1)}$ comme la dérivée de la série $F^{(k)}$.

**5.** On pose $G = \sum_{n\in\mathbf{N}} T^n$.

**(a)** Trouver une relation entre les séries formelles $G^2$ (carré de la série $G$) et $G'$.

**(b)** Soit $k \in \mathbf{N}$. Trouver une relation entre les séries $G^{k+1}$ et $G^{(k)}$.

**(c)** Trouver des expressions explicites pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans le cas où on a les égalités $m_1 = \cdots = m_d = 1$. Montrer dans ce cas particulier que la fonction $n \mapsto v_n$ est polynomiale.

**6.** On revient au cas général. Démontrer que la fonction $v : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ donnée par $n \mapsto v_n$ est quasi-polynomiale (*on pourra utiliser la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle*).

## Partie II

## Étude en dimensions 1 et 2

**1.** Soient $p$ et $q$ des entiers strictement positifs et premiers entre eux. On pose $x = p/q$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_n = \mathrm{Card}(\mathbf{Z} \cap [0, nx]) - nx$$

pour $n \in \mathbf{N}$ est une suite périodique dont on déterminera une période.

**2.** Soient $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. On pose $A = (a, b) \in \mathbf{Z}^2$ et $B = (c, d) \in \mathbf{Z}^2$. On note $[A, B]$ le segment de $\mathbf{R}^2$ d'extrémités $A$ et $B$. Démontrer que

$$\mathrm{Card}([A, B] \cap \mathbf{Z}^2) = \mathrm{pgcd}(c - a, d - b) + 1.$$

♦ Dans la suite de cette partie, on munit $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle et de la mesure usuelle, c'est-à-dire celle obtenue en faisant le produit des mesures de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. On appellera *polygone* de $\mathbf{R}^2$ l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points. Si $X$ est une partie de $\mathbf{R}^2$, on note $\partial X$ sa frontière, c'est-à-dire $\overline{X} - X^o$, où $\overline{X}$ désigne l'adhérence de $X$ et

$X^o$ son intérieur. Soit $\mathscr{P}$ un polygone de $\mathbf{R}^2$. On dit que $\mathscr{P}$ est un *polygone à sommets entiers* s'il est l'enveloppe convexe d'une partie finie de $\mathbf{Z}^2$.

♦ Soit $\mathscr{P}$ une partie compacte de $\mathbf{R}^2$. On note $V(\mathscr{P})$ son aire. On dira que la partie $\mathscr{P}$ vérifie *la formule de Pick*, si elle vérifie la formule

$$\text{Card}(\mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2) = V(\mathscr{P}) + \frac{1}{2}\text{Card}(\partial\mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2) + 1. \tag{1}$$

**3. (a)** Soient $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ avec $a < b$ et $c < d$. Le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ vérifie-t-il la formule de Pick ?

**(b)** Soient $a, b$ des entiers non nuls. Le triangle obtenu comme enveloppe convexe des points $(0, 0)$, $(a, 0)$ et $(0, b)$ vérifie-t-il la formule de Pick ?

**4. (a)** Démontrer qu'un polygone est une partie compacte de $\mathbf{R}^2$.

**(b)** Soit $\mathscr{P}$ un polygone d'intérieur non vide. Démontrer que l'intérieur de $\mathscr{P}$ est dense dans $\mathscr{P}$.

**5.** Soient $\mathscr{P}_1$ (resp. $\mathscr{P}_2$) un polygone, enveloppe convexe d'une partie finie $S_1$ (resp. $S_2$) de $\mathbf{Z}^2$. On suppose que les intérieurs de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont non vides et que $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est un segment $[A, B]$ où $A$ et $B$ sont des éléments distincts de $S_1 \cap S_2$.

**(a)** Démontrer l'égalité $[A, B] = \partial\mathscr{P}_1 \cap \partial\mathscr{P}_2$.

**(b)** Démontrer que $\mathscr{P}_1$ est contenu dans l'un des demi-plans fermés de frontière la droite $(AB)$.

**(c)** On suppose que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ vérifient la formule de Pick. Démontrer qu'il en est de même pour $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$.

**(d)** On suppose que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ vérifient la formule de Pick. Que peut-on en dire pour $\mathscr{P}_2$ ?

**6.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés de $\mathbf{R}^2$ à coordonnées entières. Démontrer que l'enveloppe convexe de $\{A, B, C\}$ vérifie la formule de Pick.

**7.** Soit $\mathscr{P}$ un polygone à sommets entiers et d'intérieur non vide. Soit $S$ un ensemble de cardinal minimal dont $\mathscr{P}$ est l'enveloppe convexe. On note $N$ le cardinal de $S$.

**(a)** Soit $A \in S$. Démontrer que $A$ n'est pas barycentre à coefficients positifs de points de $S - \{A\}$.

**(b)** Soient $A, B, C, D$ quatre points distincts de $S$. Soient $(\alpha, \beta, \gamma)$ le système de coordonnées barycentriques de $D$ dans le repère affine $(A, B, C)$ tel que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Démontrer qu'un et un seul des nombres $\alpha, \beta, \gamma$ est strictement négatif.

**(c)** On suppose $N \geqslant 3$. Démontrer qu'on peut choisir une bijection $i \mapsto A_i$ de $\{1, \ldots, N\}$ sur $S$ de sorte que $A_1$ soit le seul point de $S$ dans un des deux demi-plans ouverts de frontière la droite $(A_2A_3)$ (*il est recommandé de faire un dessin*).

**(d)** On suppose $N \geqslant 4$. Soit $M$ un point de $\mathscr{P}$ qui n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $\{A_2, \ldots, A_N\}$. Démontrer que $M$ appartient à l'enveloppe convexe de $\{A_1, A_2, A_3\}$. (*On pourra éventuellement écrire $M$ comme barycentre à coefficients positifs des points $A_1, \ldots, A_i$ avec $i$ minimal.*)

**(e)** Démontrer que $\mathscr{P}$ est la réunion de $N-2$ triangles dont les sommets appartiennent à $S$ et dont les intérieurs sont non vides deux à deux disjoints.

**8.** Soit $\mathscr{P}$ un polygone à sommets entiers et d'intérieur non vide.

**(a)** Démontrer que $\mathscr{P}$ vérifie la formule de Pick.

**(b)** Démontrer que l'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$ qui envoie un entier $n$ sur $\mathrm{Card}(n\mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2)$ est polynomiale.

## Partie III

### Le cas d'un simplexe

Soit $d$ un entier strictement positif. Soient $A_1, \ldots, A_{d+1}$ des éléments de $\mathbf{Q}^d$. On suppose qu'il n'existe pas d'hyperplan affine de $\mathbf{R}^d$ contenant l'ensemble $S = \{A_1, \ldots, A_{d+1}\}$. Soit $\mathscr{S}$ l'enveloppe convexe de l'ensemble $S$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$w_n = \mathrm{Card}(n\mathscr{S} \cap \mathbf{Z}^d)$$

et on considère la série formelle

$$W = \sum_{n \in \mathbf{N}} w_n T^n.$$

**1.** Décrire l'ensemble des entiers $q \in \mathbf{Z}$ tels que $qA_i \in \mathbf{Z}^d$ pour tout $i$ de $\{1, \ldots, d+1\}$.

♦ On fixe un entier strictement positif $q$ tel que $qA_i \in \mathbf{Z}^d$ pour $i \in \{1, \ldots, d+1\}$. Soit $\widehat{\mathscr{S}}$ l'ensemble des $(x,t) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ tels qu'il existe un élément $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1})$ de $[0,1[^{d+1}$ vérifiant la relation

$$(x,t) = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i q(A_i, 1).$$

**2. (a)** Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in n\mathscr{S}$ démontrer qu'il existe un unique élément $y \in \widehat{\mathscr{S}}$ et une unique famille $(n_1, \ldots, n_{d+1}) \in \mathbf{N}^{d+1}$ tels que

$$(x,n) = y + \sum_{i=1}^{d+1} n_i q(A_i, 1).$$

**(b)** On conserve les notations de la question **(a)**. Démontrer que $x \in \mathbf{Z}^d$ si et seulement si $y \in \widehat{\mathscr{S}} \cap \mathbf{Z}^{d+1}$.

**3.** Démontrer la relation

$$W = \sum_{(x,n) \in \widehat{\mathscr{S}} \cap (\mathbf{Z}^d \times \mathbf{Z})} T^n (1 - T^q)^{-d-1}.$$

**4.** Démontrer que la fonction $w : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ donnée par $n \mapsto w_n$ est quasi-polynomiale.

**5.** Démontrer qu'il existe une constante $C$ telle que $w_n \leqslant 1 + Cn^d$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

## Partie IV

## Applications

Dans cette partie $\mathbf{K}$ désigne un corps commutatif. On se donne un entier strictement positif $d$. On appelle *monôme* de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d]$ un élément de la forme $\prod_{i=1}^{d} X_i^{a_i}$ pour un $d$-uplet $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbf{N}^d$. On note $M$ l'ensemble de ces monômes.

Dans la suite, on note $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs et on fixe jusqu'à la fin du problème $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbf{N}^{*d}$.

Pour tout $P \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d]$, on note

$$\pi_{\boldsymbol{m}}(P) = \deg(P(T^{m_1}, \ldots, T^{m_d}))$$

avec la convention usuelle que $\deg(0) = -\infty$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $H_{\boldsymbol{m},n}$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ tels qu'on ait la relation

$$P(T^{m_1}X_1, \ldots, T^{m_d}X_d) = T^n P(X_1, \ldots, X_d)$$

dans l'anneau $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d][T]$.

**1. (a)** Soit $P$ un monôme de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d]$. Existe-t-il un $n \in \mathbf{N}$ tel que $P$ appartienne à $H_{\boldsymbol{m},n}$ ?

**(b)** Démontrer que $H_{\boldsymbol{m},n}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont on donnera une base.

**(c)** Démontrer que l'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ qui à un entier $n$ associe la dimension de $H_{\boldsymbol{m},n}$ est quasi-polynomiale.

**(d)** Démontrer que $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d]$ est la somme directe des sous-espaces $H_{\boldsymbol{m},n}$ où $n$ décrit $\mathbf{N}$.

♦ Jusqu'à la fin de ce problème, on note $G$ un groupe cyclique de cardinal $N$ et $\xi$ une racine primitive $N$-ème de l'unité dans le corps $\mathbf{C}$ des complexes. Soit $g_0$ un générateur de $G$.

**2.** Soit $V$ un espace vectoriel de dimension $d$ sur $\mathbf{C}$ et soit $\pi$ une représentation de $G$ dans $V$, c'est-à-dire un homomorphisme de groupes $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$. Démontrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de $V$ et des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ tels que $\pi(g_0)(e_i) = \xi^{\alpha_i} e_i$ pour $i \in \{1, \ldots, d\}$.

**3.** Pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ et tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{C}^d$ on pose $P(\boldsymbol{x}) = P(x_1, \ldots, x_d)$. Soit $u$ un automorphisme du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^d$. Démontrer qu'il existe un unique automorphisme $\widetilde{u}$ de la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ tel que

$$\widetilde{u}(P)(u(\boldsymbol{x})) = P(\boldsymbol{x})$$

pour $P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ et $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^d$. Comparer les degrés totaux de $P$ et $\widetilde{u}(P)$.

♦ Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ la base usuelle de $\mathbf{C}^d$. On définit une représentation $\pi$ de $G$ dans $\mathbf{C}^d$ par la relation $\pi(g_0)(e_i) = \xi^{m_i} e_i$. On note $\tau = \widetilde{\pi(g_0)}$ l'automorphisme de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ donné par la question précédente et on définit

$$A = \{\, P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d] \mid \tau(P) = P \,\}.$$

**4. (a)** Démontrer que $A$ est une sous-algèbre de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$.

**(b)** Caractériser les monômes appartenant à $A$.

**(c)** Démontrer que $A$ est la somme directe des sous-espaces vectoriels $A \cap H_{\boldsymbol{m},n}$ où $n$ décrit $\mathbf{N}$.

**(d)** Démontrer que l'application qui envoie un entier $n$ sur la dimension de $A \cap H_{\boldsymbol{m},n}$ est quasi-polynomiale.

**5.** On note $n_0$ le plus petit entier strictement positif pour lequel il existe un monôme $P \in A$ avec $\pi_{\boldsymbol{m}}(P) = n_0$. Soit $S$ l'ensemble

$$\{\, P \in A \cap M \mid \pi_{\boldsymbol{m}}(P) = n_0 \,\}.$$

On note $s$ le cardinal de $S$ et $u_1, \ldots, u_s$ les éléments de $S$.

**(a)** Démontrer que $u_1, \ldots, u_s$ sont des éléments irréductibles de $A$.

**(b)** On suppose que $s > d$. Démontrer qu'il existe deux $s$-uplets distincts $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ dans $\mathbf{N}^s$ tels que

$$\prod_{i=1}^{s} u_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{s} u_i^{\beta_i}.$$

**(c)** On continue à supposer $s > d$. L'anneau $A$ est-il factoriel ? Peut-il exister un entier strictement positif $\ell$ et un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_\ell]$ sur $A$ ?