Algèbre linéaire
Réduction des endomorphismes
préparation à l'agrégation

Alexis Tchoudjem

Université Lyon I

5 novembre 2015

Dans ce cours $\mathbb{K}$ est un corps qui peut être, par exemple, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{C}(X), ...$

1 Références

Par odre croissant de difficulté :

1. Joseph Grifone, *Algèbre linéaire*
2. Élie Azoulay, Jean Avignant, *Mathématiques, tome 4, algèbre*
3. Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre*
4. Victor Prasolov, *Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire*

2 Espaces vectoriels et morphismes : rappels

2.1 Espaces vectoriels

Définition 1 *Un $\mathbb{K}-$espace vectoriel est un groupe abélien $(E, +)$ avec une application $\mathbb{K} \times E \to E$ tels que pour tous $x, y \in E$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:*

(i) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

(ii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

(iii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,

(iv) $1x = x$.

... Si E est un espace vectoriel, on dit que $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel si pour tous $x, y \in F$, tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $x + y \in F$ et $\lambda x \in F$ ET $0 \in F$. Notation : $F \leq E$.

Notation : si I est un ensemble, on note K^I l'espace des applications $I \to \mathbb{K}$ et $\mathbb{K}^{(I)}$ le sous-espace de K^I formé des applications $f : I \to \mathbb{K}$ telles que $f^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ est fini.

Exercice 1 *(i) si $E_1, E_2 \leq E$, alors montrer que $E_1 \cup E_2 \leq E \Leftrightarrow E_1 \leq E_2$ ou $E_2 \leq E_1$.*

(ii) **si $\mathbb{K}$ est infini**, *si $E_1, ..., E_n \overset{<}{\neq} E$ montrer que $E_1 \cup ... \cup E_n \underset{\neq}{\subset} E$.*

(iii) Trouver un contre-exemple avec une infinité de sous-espaces et un corps infini et avec un nombre fini de sous-espaces et un corps fini !

solutions : ii) par récurrence sur n, soient $x_1 \in E_1 \setminus \cup_{j=2}^n E_j$, $y \in E \setminus E_1$. Alors si $E = \cup_i E_i$, $^\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $^\exists 1 \leq i_\lambda \leq n$, $y + \lambda x \in E_{i_\lambda}$. L'application $\mathbb{K} \to \{1, ..., n\}$ n'est pas injective donc il existe $\lambda \neq \mu$ tel que $i_\lambda = i_\mu = i$, d'où : $y+\lambda x, y+\mu x \in E_i \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda-\mu}(y+\lambda x-(y+\mu x)) \in E_i \Rightarrow i = 1 \Rightarrow y \in E_1$ *absurde !* iii) $\mathbb{R}[X] = \cup_n \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X] = \{0,1,X,1+X\} = \{0,1\} \cup \{0,X\} \cup \{0,1+X\}$.

2.1.1 Somme d'espaces

Si E_i est une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, on note $\sum_i E_i$ le sous-espace des $x \in E$ qui s'écrivent $x = \sum_i x_i$ pour une certaine famille $(x_i)_{i \in I}$ telle que $\{i \in I \ : \ x_i \neq 0\}$ est fini et $^\forall i,\ x_i \in I$. On dit que cette somme est *directe* si $\sum_{\substack{i \\ \text{finie}}} x_i = 0 \Rightarrow {}^\forall i,\ x_i = 0$. Notation : $\oplus_i E_i$. (La notation $\sum_{\substack{i \\ \text{finie}}} x_i = 0$ signifie que dans la famille $(x_i)_{i \in I}$ tous les termes sauf au plus un nombre fini sont nuls.

Notation : si $x \in E$, on note $\mathbb{K}x$ le sous-espace $\{\lambda x \in E \ : \ \lambda \in \mathbb{K}\}$. Si e_i est une famille de vecteurs de E, on note $\mathrm{Vect}\{e_i \ : \ i\}$ le sous-espace $\sum_i \mathbb{K}e_i$.

Exercice 2 *(i)* $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = 0$ *;*

(ii) $E_1 + E_2 + E_3 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \Leftrightarrow E_1 \cap (E_2 + E_3) = E_2 \cap (E_1 + E_3) = 0.$

Exercice 3 *Soit* $S_n(\mathbb{R})$ *le sous-espace des matrices* $n \times n$ *symétriques et soit* $A_n(\mathbb{R})$ *le sous-espace des matrices* $n \times n$ *antisymétriques . Alors montrer que :* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

2.2 Applications linéaires

2.2.1 Espaces quotients

Définition 2 *Soient* $F \leq E$. *On note* E/F *l'espace vectoriel quotient.* $\dim E/F =: \mathrm{codim}_E F$.

ATTENTION : $E/F \subseteq \mathscr{P}(E)$. En effet, les éléments de E/F sont les sous-ensembles de E de la forme $x + F := \{x + y \ : \ y \in F\}$ (noté aussi $x \bmod F$). Lois : $(x+F)+(y+F) := (x+Y)+F$, $\lambda.(x+F) := \lambda x + F$. Bien entendu $x + F = 0$ (dans E/F) $\Leftrightarrow x \in F$.

Définition 3 (surjection canonique) *C'est l'application linéaire* $\pi : E \to E/F$, $x \mapsto x + F$.

Additivité et homogénéité !

application linéaire = morphisme ; application linéaire bijective = isomorphisme.

Exercice 4 *Vérifier que l'application réciproqie d'une application linéaire bijective est aussi linéaire.*

Bien entendu deux espaces isomorphes ont la même dimension.

Exercice 5 *Si $F \oplus G = E$, alors $G \simeq E/F$, $g \mapsto g + F$.*

Exercice 6 $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \dim F$ *(cf. ci-dessous la définition de la dimension).*

Définition 4 *Soit $f : E \to E'$ une application linéaire. On note* $\ker f := f^{-1}(0)$, $\mathrm{Im}\, f := f(E)$, $\mathrm{Coker} f := E/\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 7 *Une application linéaire $f : E \to E'$ est injective si et seulement si* $\ker f = 0$, *surjective si et seulement si* $\mathrm{Coker} f = 0$.

Proposition 2.1 (factorisation) *Soit $f : E \to E'$ une application linéaire, soit $F \leq E$. L'application $f : E \to E'$ se factorise en $\overline{f} : E/F \to E'$ telle que :*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & E' \\ E/F \arrow[ur, "\overline{f}"] & \end{tikzcd}$$

si et seulement si $F \leq \ker f$.

Proposition 2.2 (théorème du rang) *L'application* $E/\ker f \to f(E)$, $x + \ker f \mapsto f(x)$ *est un isomorphisme.*

Exercice 8 *Si $f : E \to E'$, si* $\dim E' = \dim E$ **finie**, *alors f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f surjective. Donner des contre exemples en dimension infinie.*

2.3 Bases, dimension

Famille libre, liée, génératrice, base.

Définition 5 *Une base est une famille libre et génératrice.*

Exemple : la base canonique de $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 *La famille* $\{X^k, \frac{1}{(X-z)^n} \ : \ k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, \, z \in \mathbb{C}\}$ *est une base du* $\mathbb{C}-$*espace vectoriel* $\mathbb{C}(X)$ *Indication : décomposer en éléments simples.*

Lemme 2.3 *Soit* X *une famille génératrice minimale (respectivement libre maximale), alors* X *est une base.*

Théorème 2.4 (de la base adaptée) *Soient* $X \subseteq Y \subseteq E$ *où* E *est un espace vectoriel,* X *une famille libre,* Y *une famille génératrice. Alors, il existe une base* Y' *de* E *telle que* $X \subseteq Y' \subseteq Y$.

On dit qu'un espace vectoriel E est de *dimension finie* si E peut être engendré par un nombre fini de vecteurs.

Exemple : $\mathbb{R}[X]$ n'est pas un $\mathbb{R}-$espace vectiorel de dimension finie.

Théorème 2.5 *Soit* E *un espace vectoriel avec une famille génératrice de* n *vecteurs. Alors toute famille de* $n+1$ *vecteurs est liée.*

Pour démontrer ce théorème, on utilise le :

Lemme 2.6 (d'échange de Steinitz) *Soit* E *un* $K-$*espace vectoriel. Soit* $Y \subseteq E$ *une partie génératrice de cardinal* s. *Soient* $x_1, ..., x_r \in E$ *des éléments linéairement indépendants. Alors pour tout* $0 \leq i \leq \min\{r, s\}$, *il existe* $y_{i+1}, ..., y_s \in Y$ *tels que la famille* $\{x_1, ..., x_i, y_{i+1}, ..., y_s\}$ *est génératrice. En particulier* $r \leq s$.

Conséquences :

Théorème 2.7 *Un sous-espace d'un espace de dimension finie est encore de dimension finie.*

Théorème 2.8 (Unicité du cardinal des bases) *Un espace vectoriel a toujours une base et deux bases d'un espace vectoriel* E *ont le même cardinal* i.e. *sont en bijection.*

Définition 6 *Soit* E *un espace vectoriel. On note* $\dim E$ *le cardinal commun des bases de* E.

Exercice 10 *a)* $\dim \mathbb{K}^n = n$ *et tout espace de dimension* n *est isomorphe à* $\mathbb{K}^n$.

b) $\dim \mathbb{K}[X]_{\leq n} = n + 1$.

c) $\dim \mathbb{K}^{(I)} = |I|$.

d) Tout espace de dimension dénombrable est isomorphe à $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

e) *Toute famille infinie non dénombrable dans un espace de dimension dénombrable est liée.*

f) $\mathbb{R}$ *n'est pas un* $\mathbb{Q}-$*espace vectoriel de dimension dénombrable,* $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ *non plus.*

g) *Toute famille génératrice de* $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ *contient une base.*

h) *Toute famille libre dans* $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ *peut être complétée en une base et est au plus dénombrable.*

i) *Un sous-espace d'un espace de dimension dénombrable est de dimension finie ou dénombrable.*

Indication : soit V un espace de dimension dénombrable avec pour base e_n, $n \in \mathbb{N}$. Soit $v_i, i \in I$ une famille de vecteurs linéairement indépendants. Si $i \in I$, on note E_i l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}$ tels que v_i a un coefficient non nul selon le vecteur e_n(lorsqu'on le décompose dans la base des e_k). Alors on a une application $h : I \to \mathscr{P}_{\text{finie}}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Si F est une partie finie de $\mathbb{N}$, $h^{-1}F$ est contenu dans $\{i \in I \ : \ v_i \in \mathrm{Vect}(e_n \ : \ n \in F)\}$ qui est fini car les v_i sont linéairement indépendants et $\dim \mathrm{Vect}(e_n : n \in F) = |F| < \infty$. Donc I est au plus dénombrable (pour tout i, $h^{-1}h(i)$ est fini donc il existe une injection $j_i : h^{-1}h(i) \to \mathbb{N}$, et donc une injection $I \to \mathscr{P}_{\text{finie}}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$, $i \mapsto (h(i), j_i(i))$; or, $\mathscr{P}_{\text{finie}}(\mathbb{N})$ est dénombrable ; en effet, voici une bijection $\mathscr{P}_{\text{finie}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, $\{a_1, ..., a_k\} \mapsto 2^{a_1} + ... + 2^{a_k}$.

Exercice 11 *L'espace* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *est de dimension non dénombrable sur* $\mathbb{R}$. *Indication : voici une famille libre infinie de cardinal non dénombrable :* $((n^a)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ a \in \mathbb{R})$.

Proposition 2.9 *Si* $F \leq E$, *alors il existe* $G \leq E$ *tel que* $E = F \oplus G$. *En particulier, si* E *est de dimension finie,* $\dim E/F = \dim E - \dim F$.

Démonstration : Soit (f_i) une base de F, on complète en $(f_i) \cup (g_j)$ une base de E. Alors le sous-espace $G := \mathrm{Vect}\{g_j\}$ est un supplémentaire de F dans E. *q.e.d.*

Exercice 12 *(i)* $U \leq V \Rightarrow \dim U \leq \dim V$ *égalité* $\Leftrightarrow \dim U = \dim V$ *;*

(ii) $\dim E_1 \oplus E_2 = \dim E_1 + \dim E_2$ *;*

(iii) $\dim E \times F = \dim E + \dim F$.

Corollaire 2.9.1 (théorème des zéros pour $\mathbb{C}$) *Si* $K \geq \mathbb{C}$ *est un corps ET une* $\mathbb{C}-$*algèbre de type fini, alors* $K = \mathbb{C}$.

Démonstration : Soient $a_1, ..., a_n \in K$ tels que $K = \mathbb{C}[a_1, ..., a_n]$. Alors K est engendré comme $\mathbb{C}-$espace vectoriel par les monômes $a_1^{\alpha_1}...a_n^{\alpha_n}$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{N}$. Donc K est de dimension au plus dénombrable. Donc si $x \in K$, x est algébrique sur $\mathbb{C}$ car sinon, $K \geq \mathbb{C}(x) \simeq \mathbb{C}(X)$ qui est de dimension le cardinal de $\mathbb{C}$ qui n'est pas dénombrable (ce qui est absurde). *q.e.d.*

Exercice 13 *Définition alternative de la dimension : soit E un espace vectoriel. Alors* $\dim E = \sup\{d \geq 0 \ : \ ^\exists V_0 < V_1 < ... < V_d \leq E\}$.

Théorème 2.10 (du rang) *Soit f une application linéaire $f : E \to E'$. Si E est de dimension finie, alors* $\dim E = \mathrm{rang} f + \dim \ker f$ *(si E de dimension finie).*

Proposition 2.11 (Formule de Grassmann) *Soient $E_1, E_2 \leq E$; alors :* $\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$.

Démonstration : L'application linéaire $E_1 \times E_2 \to E_1 + E_2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ est suejective de noyau isomorphe à $E_1 \cap E_2$. *q.e.d.*

Exercice 14 $\dim(E_1 + E_2 + E_3) = \dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3 - \dim E_1 \cap E_2 - \dim E_2 \cap E_3 - \dim E_1 \cap E_3 + \dim E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

Cours du jeudi 17 septembre 2015

3 Rappels sur les matrices

Si $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $N \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut définir $MN \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ par $(MN)_{i,j} = \sum_k M_{i,k}N_{k,j}$ et l'application $(M, N) \mapsto MN$ est bilinéaire !

Soient e_i, e'_i deux bases finies d'un même espace E de dimension n. On note $P := P_e^{e'}$ la matrice de passage de la base e à la base e' *i.e.* : $e'_j = \sum_{i=1}^n P_{i,j}e_i$ pour tout $1 \leq j \leq n$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 15 $P_e^{e'}P_{e'}^e = I_n$ *; plus généralement* $P_e^{e'}P_{e'}^{e"} = P_e^{e"}$.

Définition 7 *Soient E, E' deux espaces vectoriels de dimensions n, n'. Si f est une application linéaire $E \to E'$, si e est une base de E, si e' est une base de E', on note $M :=$* $\mathrm{Mat}(f)_{e,e'} \in \mathscr{M}_{n',n}(\mathbb{K})$ *la matrice telle que pur tout $1 \leq j \leq n$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n'} M_{i,j}e_i$.*

Remarque : nombre de lignes = dimension de l'espace d'arrivée ; nombre de colonnes = dimension de l'espace de départ.

Réciproquement, si $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors M définit une application linéaire : $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, $X \mapsto MX$.

Proposition 3.1 (Formules de changement de bases) *Soit* $v \in E$. *Soient* $X, X' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *tels que* $v = \sum_i X_i e_i = \sum_i X'_i e'_i$. *Alors* $X = PX'$. *Si* $f \in \mathscr{L}(E)$, *si* $M = \mathrm{Mat}(f)_e$ *et* $M' = \mathrm{Mat}(f)_{e'}$, *alors* $M = PM'P^{-1}$.

Exercice 16 *Si* p *est un projecteur, si* $\mathbb{K} \leq \mathbb{C}$, *alors* $\mathrm{rg}\, p = \mathrm{tr} p$.

3.1 Égalité entre le rang des lignes et le rang des colonnes

Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On rappelle que le rang des lignes de A, notons-le $\mathrm{rg}_L(A)$, est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ engendré par les lignes de A. On rappelle que rang des colonnes de A, notons-le $\mathrm{rg}_C(A)$, est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de A.

Alors :

Théorème 3.2

$$\mathrm{rg}_L(A)$$
$$= \min \left\{ t \geq 1 \ : \ ^\exists B \in \mathscr{M}_{m,t}(\mathbb{K}),\ ^\exists C \in \mathscr{M}_{t,n}(\mathbb{K}),\ A = BC \right\}$$
$$= \mathrm{rg}_C(A) \ .$$

On notera $\mathrm{rg}\,(A)$ *le rang de* A *(des lignes ou des colonnes).*

En particulier, $\mathrm{rg}\,(A) \leq \min\{m, n\}$.

Démonstration :

Montrons par exemple la première égalité (la deuxième se montre de la même façon) :

Notons r_0 le minimum des t tels que $A = BC$ pour un certain $B \in \mathscr{M}_{m,t}(\mathbb{K})$ et un certain $C \in \mathscr{M}_{t,n}(\mathbb{K})$.

Soit $r := \mathrm{rg}_L(A)$. Alors, il existe une base $l_1, ..., l_r$ du sous-espace engendré par les lignes de A. En particulier, pour toute ligne L_i de A,

$$* \ \ L_i = b_{i,1} l_1 + ... + b_{i,r} l_r$$

pour certains coefficients $b_{i,j} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r$. Soit $B \in \mathscr{M}_{m,r}(\mathbb{K})$ la matrice des $b_{i,j}$ et soit $C \in \mathscr{M}_{r,n}$ la matrice dont les lignes sont $l_1, ..., l_r$. La relation $*$ pour tout i, donne : $A = BC$. Donc, $r_0 \leq r$.

D'un autre côté, si $A = BC$ avec $B \in \mathscr{M}_{m,t}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{t,n}(\mathbb{K})$. alors pour tout $1 \leq i \leq m$, la ligne L_i de A vérifie :

$$L_i = B_{i,1}l_1 + ..; +B_{i,t}l_t$$

où $l_1, ..., l_t$ sont les lignes de C. Donc le sous-espace engendré par les lignes de A est de dimension $\leq t$. Donc $r \leq t$. Et donc, $r \leq r_0$ si on prend $t = r_0$.

En résumé, le rang d'une matrice A est à la fois le rang des lignes de A, le rang de ses colonnes et la dimension de son image.

q.e.d.

On déduit de cette caractérisation du rang que :

$$\mathrm{rg}\,(AB) \leq \min\{\mathrm{rg}\,A, \mathrm{rg}\,B\}$$

pour toutes matrices $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Corollaire 3.2.1 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Si A est de rang m, alors A est inversible à droite et réciproquement. Si A est de rang n, alors A est inversible à gauche et réciproquement. En particulier si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible à gauche si et seulement si A est inversible à droite si et seulement si A est de rang n.*

Proposition 3.3 *Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de rang r, il existe $B \in \mathscr{M}_{m,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{K})$ tels que $A = BC$. Dans ce cas, $\mathrm{rg}\,B = r = \mathrm{rg}\,C$. De plus, il existe $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que :*

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Démonstration : Si $A = BC$ avec $B \in \mathscr{M}_{m,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{K})$, alors $r = \mathrm{rg}\,A \leq \mathrm{rg}\,B \leq r$ donc $\mathrm{rg}\,B = r$. De même, $\mathrm{rg}\,C = r$. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que :

$$PB = \left(\begin{array}{c} I_r \\ \hline 0 \end{array}\right) , \; CQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \end{array}\right)$$

D'où :

$$PAQ = PBCQ = \left(\begin{array}{c} I_r \\ \hline 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

q.e.d.

Pour terminer voici un critère pratique pour calculer le rang d'une matrice :

Proposition 3.4 *Soit* $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *On dit que* B *est une matrice extraite de* A *si* B *est de la forme :*

$$B = (a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$$

pour un certain $I \subseteq \{1, ..., m\}$ *et un certain* $J \subseteq \{1, ..., n\}$.

Le rang de A *est le plus grand entier* r *tel qu'il existe une matrice* B*, extraite de* A*, carrée, inversible de taille* r.

Exemple : la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible (*exo*) mais la matrice extraite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

l'est (*exo*) . Donc A est de rang 2.

Démonstration : Soit B une matrice extraite de A, carrée, inversible de taille r. Supposons pour simplifier que $B = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$. Alors, les r premières lignes de B sont linéairement indépendantes. A fortiori, les r premières lignes de A sont aussi linéairement indépendantes. Donc $\operatorname{rg} A \geq r$. Supposons que A est de rang R. Alors il existe R lignes de A qui sont linéairement indépendantes, par exemple les R premières. La matrice

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq R \\ 1 \leq j \leq n}}$$

est donc de rang R. Elle admet donc au moins R colonnes indépendantes, par exemple les R premières. Alors la matrice extraite :

$$(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq R}$$

est carrée, de taille R et inversible (car de rang R). *q.e.d.*

4 Le déterminant

4.1 Dimension 2 et 3

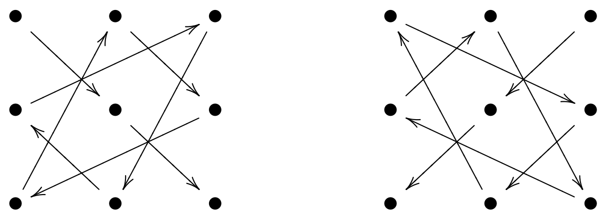
Définition 8

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} := a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} := a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$$

$$-a_{2,1}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$$

Moyen mnémotechnique :



$+$ $\qquad$ $-$

Interprétation géométrique (sur $\mathbb{R}$) : dét (A) est une aire ou un volume « orienté ».

Exercice 17 — dét $A \neq 0 \Leftrightarrow A$ *inversible ;* — dét $(AB) =$ dét Adét B

4.2 Déterminant en dimension quelconque

4.2.1 Rappels sur les permutations

Soit σ une permutation de l'ensemble $\{1, ..., n\}$. Une *inversion* de σ est une paire $\{i, j\}$ telle que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$ (« c'est quand un plus grand est à gauche d'un plus petit »(en écrivant la liste $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ dans cet ordre).

On note $I(\sigma)$ l'ensemble des inversions de σ.

On dit qu'une permutation est *paire* si elle a un nombre pair d'inversions ; on dit qu'elle est *impaire* si elle a un nombre impair d'inversions. Pour toute permutation σ, on pose :

$$\epsilon(\sigma) := 1 \text{ si } \sigma \text{ est une permutation paire}$$

-1 si σ est une permutation impaire

Exercice 18 *L'application $\sigma \mapsto \epsilon(\sigma)$ est un morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ vers $\{\pm 1\}$. En particulier, si σ est un produit de n transpositions, $\epsilon(\sigma) = (-1)^n$.*

Exemple : voici les inversions et les signatures des 6 permutations d'ordre 3 :

σ	$I(\sigma)$ $\#I(\sigma)$	$\epsilon(\sigma)$
$(1,2,3)$	$\emptyset$ 0	1
$(2,1,3)$	{{1,2}} 1	-1
$(1,3,2)$	{{2,3}} 1	-1
$(2,3,1)$	{{2,3},{1,3}} 2	1
$(3,1,2)$	{{3,1},{3,2}} 2	1
$(3,2,1)$	{{1,2},{2,3},{1,3}} 3	-1

4.2.2 Définitions du déterminant

Définition 9 *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice. On note :*

$$\text{dét}\, A := |A| := \sum_{\sigma\,\text{permutation d'ordre n}} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots . a_{\sigma(n),n}$$

le déterminant de A.

Exercice 19 *Pour $n = 2, 3$ on retrouve la définition usuelle.*

Proposition 4.1 (déterminant d'une matrice triangulaire) *Soit $T = (t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice triangulaire supérieure* i.e. *$t_{i,j} = 0$ si $i > j$. Alors :*

$$\begin{vmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\, 0 & t_{n,n} \end{vmatrix} = t_{1,1} \ldots t_{n,n}$$

le produit des coefficients diagonaux. En particulier,

$$|I_n| = 1$$

.

Démonstration : Par définition :

$$|T| = \sum_\sigma \epsilon(\sigma) t_{\sigma(1),1} ... t_{\sigma(n),n}$$

(somme sur les permutations σ d'ordre n)

Or, le produit $t_{\sigma(1),1}...t_{\sigma(n),n}$ est nul sauf si, éventuellement, $\sigma(1) \leq 1, ..., \sigma(n) \leq n$. Cela n'arrive que si $\sigma(1) = 1, ..., \sigma(n) = n$ *c-à-d* si $\sigma = (1, ..., n)$. Donc :

$$|T| = \epsilon((1, 2, ..., n)) t_{1,1} ... t_{n,n} = t_{1,1} ... t_{n,n} \ .$$

q.e.d.

En particulier, $\text{dét}\,(I_n) = 1$.

Cette définition du déterminant et « la seule possible » au sens suivant :

Théorème 4.2 *Soit une application :*

$$D : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}\,,\ A \mapsto D(A)$$

i) linéaire en les colonnes de A,
ii) alternée i.e. *$D(A) = 0$ si A a deux colonnes identiques ;*
alors $D = D(I_n)\text{dét}$.

Démonstration : Le *i*) signifie que si on note $C_1, ...C_n$ les colonnes d'une matrice A. Pour tout j, si C'_j est un vecteur colonne, alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$D(C_1|...|\lambda C_j + \mu C'_j|...|C_n) = \lambda D(C_1|...|C_j|...|C_n) + \mu D(C_1|...|C'_j|...|C_n) \ .$$

Existence : Il est clair que dét vérifie i). Vérifions ii) :

supposons que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a ses colonnes C_i et C_j identiques, $i < j$. Pour tout permutation σ d'ordre n, posons σ' la permutation définie par :

$$\sigma'(p) = \begin{cases} \sigma(p) \text{ si } p \neq i, j, \\ \sigma(j) \text{ si } p = i, \\ \sigma(i) \text{ si } p = j. \end{cases}$$

Alors

$$(*) \ \ \epsilon(\sigma) = -\epsilon(\sigma') \ .$$

En effet,

$$(I(\sigma) \cup I(\sigma')) \ \setminus \ (I(\sigma) \cap I(\sigma')) =$$

$$\{\{k_i, k_j\}\} \cup \{\{k_i, k_p\} \,:\, i < p < j\} \cup \{\{k_q, k_j\} \,:\, i < q < j\}$$

qui est un ensemble de cardinal $2(j-i)-1$ (*exo*) . Donc :

$$|I(\sigma)| + |I(\sigma')| = 2|I(\sigma) \cap I(\sigma')| + 2(j-i) - 1$$

$$\Rightarrow |I(\sigma)| = |I(\sigma')| - 1 \mod 2$$

$$\Rightarrow \epsilon(\sigma) = -\epsilon(\sigma') \ .$$

On a donc une bijection :

$$\{\sigma \text{ permutation pair}\} \stackrel{1:1}{\to} \{\sigma \text{ permutation impair}\}$$

$$\sigma \mapsto \sigma'$$

De plus, comme les colonnes C_i et C_j de la matrice A sont identiques, on a :

$$a_{\sigma(1),1} \ldots . a_{\sigma(n),n} = a_{\sigma'(1),1} \ldots a_{\sigma'(n),n}$$

pour toute permutation σ.

Donc :

$$\text{dét}\, A = \sum_{\sigma \text{permutation pair}} a_{\sigma(1),1} \ldots . a_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \text{permutation impair}} a_{\sigma(1),1} \ldots . a_{\sigma(n),n}$$

$$= \sum_{\sigma \text{permutation pair}} a_{\sigma(1),1} \ldots . a_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \text{permutation pair}} a_{\sigma'(1),1} \ldots . a_{\sigma'(n),n}$$

$$= \sum_{\sigma \text{permutation pair}} a_{\sigma(1),1} \ldots . a_{\sigma(n),n} - a_{\sigma'(1),1} \ldots . a_{\sigma'(n),n}$$

$$= 0 \ .$$

Unicité : Soit D qui vérifie i), ii) de l'énoncé. Alors, si on note $E_1, ..., E_n$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a :

$$C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,jE_i}$$

pour toute colonne C_j de A et par linéarité :

$$D(A) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \ldots a_{i_n,n} D(E_{i_1}|\ldots|E_{i_n}) \ .$$

Or, $D(E_{i_1}|...|E_{i_n}) = 0$ si les $i_1, ..., i_n$ ne sont pas tous distincts. Donc :

$$D(A) = \sum_{(i_1,...,i_n) \text{ arrangment}} D(E_{i_1}|...|E_{i_n}) \ .$$

Il reste à montrer que pour une permutation $(i_1, ..., i_n)$, $D(E_{i_1}|...|E_{i_n}) = \epsilon(i_1, ..., i_n)D(I_n)$. On le démontre par récurrence sur $k \geq 1$ tel que :

$$i_{k-1} > i_k < ... < i_n \ .$$

Si $k = 1$, c'est évident car alors, $i_1 = 1, ..., i_n = n$. Si $k > 1$, on échange i_{k-1} et i_k : on obtient une permutation : $(i'_1, ..., i'_n)$ où $i'_j := i_j$ si $j \neq k, k+1$, $i'_k := i_{k-1}$ et $i'_{k-1} := i_k$. Comme :

$$i'_{k-1} < ... < i'_n$$

on a par hypothèse de récurrence :

$$D(E_{i'_1}|...|E_{i'_n}) = \epsilon(i'_1, ..., i'_n)D(I_n) \ .$$

Or, d'après (*), on a :

$$\epsilon(i'_1, ..., i'_n) = -\epsilon(i_1, ..., i_n) \ .$$

De plus, on a :

$$D(E_{i_1}|...|E_{i_{k-1}} + E_{i_k}|E_{i_{k-1}} + E_{i_k}|...|E_{i_n}) = 0$$

$$\Leftrightarrow D(E_{i_1}|...|E_{i_{k-1}}|E_{i_{k-1}}|...|E_{i_n}) + D(E_{i_1}|...|E_{i_{k-1}}|E_{i_k}|...|E_{i_n})$$
$$+D(E_{i_1}|...|E_{i_k}|E_{i_{k-1}}|...|E_{i_n}) + D(E_{i_1}|...|E_{i_k}|E_{i_k}|...|E_{i_n}) = 0$$
$$\Leftrightarrow D(E_{i_1}|...|E_{i_{k-1}}|E_{i_k}|...|E_{i_n}) + D(E_{i_1}|...|E_{i_k}|E_{i_{k-1}}|...|E_{i_n}) = 0$$
$$\Leftrightarrow D(E_{i_1}|...|E_{i_n}) = -D(E_{i'_1}|...|E_{i'_n}) \ .$$

Conclusion : $D(E_{i_1}|...|E_{i_n}) = \epsilon(i_1, ..., i_n)D(I_n)$. *q.e.d.*

Déterminant de la transposée

Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on note ${}^tA \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ la matrice de coefficients :

$$({}^tA)_{i,j} := A_{j,i}$$

pour tous $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Théorème 4.3 *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors,* $\text{dét}\,({}^tA) = \text{dét}\,A$*.*

Corollaire 4.3.1 *Dans le théorème 4.2, on peut remplacer « colonne » par « ligne » .*

Démonstration : Si σ est une permutation d'ordre n. Si $1 \leq i \neq j \leq n$, alors $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ est une inversion de σ si et seulement si $\{i, j\}$ est une inversion de σ^{-1} (*exo*) . En particulier, $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$ pour toute permutation σ.

Or, on a :

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n} &= a_{\sigma(\sigma^{-1}(1)),\sigma^{-1}(1)}...a_{\sigma(\sigma^{-1}(n)),\sigma^{-1}(n)} \\ &= a_{1,\sigma^{-1}(1)}...a_{n,\sigma^{-1}(n)} \ . \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{dét}\,A &= \sum_\sigma \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_\sigma \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)}...a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_\sigma \epsilon(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma(1)}...a_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_\sigma \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)}...a_{n,\sigma(n)} \\ &= \text{dét}\,({}^tA) \ . \end{aligned}$$

q.e.d.

Conséquences :

Théorème 4.4 (déterminant du produit) *Soient* $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *:*

$$\text{dét}\,(AB) = \text{dét}\,A \text{dét}\,B \ .$$

Démonstration : En effet, si A est fixée, l'application :

$$F \ : \ B \mapsto \text{dét}\,(AB)$$

est $n-$linéaire alternée en les colonnes de B. Donc :

$$\begin{aligned} {}^\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ F(B) &= \text{dét}\,B F(I_n) \\ &= \text{dét}\,A \text{dét}\,B \ . \end{aligned}$$

q.e.d.

Cours du jeudi 24 septembre 2015

Exemple : *Triangles de Pascal.* Voici 3 exemples de matrices de taille $n+1 \times n+1$:

$$T_- := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 1 & n & \dots & & & 1 \end{pmatrix} = \left(\binom{i}{j} \right)_{0 \le i,j \le n}$$

$$T_+ := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & n \\ \vdots & & 1 & 3 & 6 & & \vdots \\ & & & 1 & 4 & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & & & 1 \end{pmatrix} = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \le i,j \le n}$$

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & & n+1 \\ 1 & 3 & 6 & & & & \\ 1 & 4 & & \ddots & & & \\ 1 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & n+1 & & & & & \binom{2n}{n} \end{pmatrix} = \left(\binom{i+j}{i} \right)_{0 \le i,j \le n}$$

Exercice 20 *On a :*

$$\text{dét}\, P = \text{dét}\, T_- T^+ = 1 \ .$$

4.3 Règle de Cramer

Notation : Soit A une matrice $n \times n$. On note $A^{i,j}$ la matrice obtenue en retirant la ligne i et la colonne j de A.

On peut calculer un déterminant $n \times n$ si on sait calculer un déterminant $(n-1) \times (n-1)$:

Proposition 4.5 (Développement par rapport à une ligne ou une colonne) *Soit A une matrice $n \times n$. Alors :*

$$^\forall 1 \leq j \leq n, \text{ dét} A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} |A^{i,j}|$$

$$^\forall 1 \leq i \leq n, \text{ dét} A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} |A^{i,j}| \ .$$

Démonstration : Par $n-$linéarité du déterminant selon les colonnes, comme on a :

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{1,1}} & & j & & \phantom{a_{1,n}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & & 1 & & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array},$$

on a :

$$\text{dét} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{1,1}} & & j & & \phantom{a_{1,n}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & & 1 & & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array}.$$

Or en échangeant la colonne j avec la colonne $j-1$ puis la colonne $j-1$ avec la colonne $j-2$, etc, on trouve :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & & 1 & & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & 0 & & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

ensuite, en échangeant la ligne i avec la ligne $i-1$ puis la ligne $i-1$ avec la ligne $i-2$, etc, on obtient :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & & 1 & & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & 0 & & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1}(-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j}|A^{i,j}| \ .$$

Et on démontre de même la formule de développement par rapport à la ligne i. <u>*q.e.d.*</u>

EXEMPLE :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Proposition 4.6 (formule de Cramer pour les solutions des systèmes linéaires) *Si :*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{n,1}x_n & = & y_1 \\ & \dots & \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n & = & y_n \end{cases}$$

alors, $\text{dét}\, Ax_k = \text{dét}\, A_k$ *où* A_k *est la matrice obtenue en remplaçant la* $k-$*ième colonne de* A *par la colonne* $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Démonstration : On développe par rapport à la $k-$ième colonne :

$$\text{dét}\, A_k = \sum_{i=1}^{n} y_i(-1)^{i+k}|A^{i,k}|$$

(on remplace les y_i par leur expression en fonction des x_j) :

$$\begin{aligned}\text{dét}\, A_k &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j (-1)^{i+k} |A^{i,k}| \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+k} |A^{i,k}| \right) x_j \ .\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+k} |A^{i,k}|$$

est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la colonne k de la matrice A par la colonne j (*exo*) . Donc :

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+k} |A^{i,k}| = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ \text{dét}\, A \text{ sinon } . \end{cases}$$

q.e.d.

Remarque : Si dét $A \neq 0$, alors A inversible. En effet, dans ce cas, les formules de Cramer montrent que l'on peut inverser le système défini par A.

Plus précisément, on peut décrire la matrice inverse de A si dét $A \neq 0$.

Définition 10 (Comatrice) *Soit A une matrice $n \times n$, sa comatrice, notée* $\text{com}(A)$ *ou* $\widetilde{A}$ *est la matrice $n \times n$ dont le $(i, j)-$ième coefficient est :*

$$\widetilde{A}_{i,j} = (-1)^{i+j} |A^{i,j}| \ .$$

Corollaire 4.6.1 *Pour toute matrice A de taille $n \times n$:*

$${}^t\widetilde{A} A = A {}^t\widetilde{A} = \text{dét}\, A I_n$$

Démonstration : En effet, le $(i, j)-$ème coefficient de ${}^t\widetilde{A}A$ est donnée par la formule :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{k,j} |A^{k,i}|$$

qui est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant, dans la matrice A, la colonne i par la colonne j. Donc :

$$({}^t\widetilde{A}A)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{k,j} |A^{k,i}|$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \text{dét}\, A \text{ si } i = j \end{cases} .$$

q.e.d.

Remarque : Cette formule reste vraie si $\mathbb{K}$ est remplacé par un anneau commutatif (p. ex : $\mathbb{Z}, \mathbb{K}[T]$).

Exemple :

— Si $ad - bc \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

— Si A est une matrice 3×3 et si $|A| \neq 0$, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A^{1,1}| & -|A^{2,1}| & |A^{3,1}| \\ -|A^{1,2}| & |A^{2,2}| & -|A^{3,2}| \\ |A^{1,3}| & -|A^{2,3}| & |A^{3,3}| \end{pmatrix} .$$

Théorème 4.7 *A est inversible $\Leftrightarrow$ $\text{dét}\, A \neq 0$ et l'inverse est donné par :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, A} {}^t\widetilde{A} = \frac{1}{\text{dét}\, A} \left(\pm |A^{j,i}|\right)$$

Exercice 21 *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Alors, M définit un endomorphisme $\mathbb{Z}-$linéaire : $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$. Cet endomorphisme est surjectif $\Leftrightarrow$ $\text{dét}\, M = \pm 1$, injectif $\Leftrightarrow$ $\text{dét}\, M \neq 0$. En particulier surjectif $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ injectif (ce qui reste vrai pour un endomorphisme d'un $A-$module de type fini où A est un anneau quelconque.*

Terminons ce chapitre par quelques déterminants remarquables :

Exercice 22 *Déterminant de Vandermonde. C'est le déterminant $(n+1) \times (n+1)$ suivant :*

$$V(x_0, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} .$$

On a : $V(x_1,...,x_n) = \prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$.

Indication : on peut raisonner par récurrence et remarquer que : $V(x_0,...,x_n)$ *est un polynôme de degré* $\leq n$ *en* x_n*, de coefficient dominant* $V(x_0,...,x_{n-1})$ *qui s'annule lorsque* $x_n = x_0,...,x_{n-1}$ *; donc :* $V(x_0,...,x_n) = V(x_0,...,x_{n-1})(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-1})$.

Conséquence : Si $x_1,...,x_n \in \mathbb{C}$*, alors :*

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + ... + x_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ x_1^n + ... + x_n^n = 0 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = ... = x_n = 0$$

(ce système n'est pas linéaire).

Exercice 23 *Montrer que le déterminant* $n \times n$ *suivant :*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

est le nième nombre de Fibonacci $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Enfin voici une autre façon de calculer un déterminant 3×3 :

Exercice 24 *Soit* A *une matrice* 3×3*. Alors si* $a_{2,2} \neq 0$ *:*

$$|A| = \frac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \end{vmatrix}}{a_{2,2}}$$

5 Réduction

Dans ce chapitre E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

5.1 Vecteurs propres

Définition 11 (vecteurs,valeurs propres, spectre) *Soit u un endomorphisme de E. Un vecteur propre de u est un vecteur* **non nul** $x \in E \setminus \{0\}$ *tel que :*

$$u(x) = \lambda x$$

pour un certain scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est la valeur propre de u associée au vecteur propre x. On dit aussi que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Le spectre de u est l'ensemble des valeurs propres de u. Notation : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ *(ou* $\mathrm{Sp}(u)$*).*

Version matricielle :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Un *vecteur propre* de A est un vecteur **non nul** $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$AX = \lambda X$$

pour un certain scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est la *valeur propre* de A associée au vecteur propre X. On dit aussi que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres de A. Notation : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ (ou $\mathrm{Sp}(A)$ si le corps où l'on se place est évident).

Exemple : [s]

— (Cet exemple est en dimension infinie) Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $u = \partial : E \to E$, $f \mapsto f'$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, posons

$$e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\lambda x}\ .$$

On a : $e'_\lambda = \lambda e_\lambda$ donc chaque fonction e_λ est un vecteur propre de ∂ de valeur propre associée λ.

— Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le réel $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une valeur propre de A. En effet :

$$A.\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(*exo*)

— Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Le complexe $j := -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une valeur propre de A. En effet :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} = j\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

(*exo*)

« Comment trouver les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice parmi tous les éléments de $\mathbb{K}$? »

5.2 Polynôme caractéristique

Proposition 5.1 *Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :*

$$\lambda \textit{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow \text{dét}\,(A - \lambda I_n) = 0 \ .$$

Démonstration : λ n'est pas une valeur propre de A

$$\Leftrightarrow {}^{\forall}X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\},\ AX \neq \lambda X \, i.e.\ (A - \lambda I_n)X \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ injective}$$

$$\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ inversible}$$

$$\Leftrightarrow \text{dét}\,(A - \lambda I_n) \neq 0 \ .$$

q.e.d.

Définition 12 (polynôme caractéristique) *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est : $\chi_A(X) := \text{dét}\,(XI_n - A)$.*

Remarque : [s] — La matrice $XI_n - A$ est à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$ donc son déterminant $\chi_A(X) \in \mathbb{K}[X]$.

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, dét $(A - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda)$.

Exemple : [s]

— Si $n = 2$:

$${}^{\forall}A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \chi_A(X) = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$$

$$= X^2 - (\mathrm{tr} A)X + \text{dét}\, A$$

où $\mathrm{tr} A := a + d$.

— Si $n = 3$,

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix},\ \chi_A(X) = X^3 - (\mathrm{tr} A)X^2 + s_2 X - \text{dét}\, A$$

où $\mathrm{tr} A := a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$ et :

$$s_2 := \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

(c'est la trace de la comatrice de A).

— n quelconque :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \chi_A(X) = X^n - s_1 X^{n-1} + ... + (-1)^n s_n$$

où pour tout $1 \leq d \leq n$, le coefficient devant $(-1)^d X^{n-d}$ est :

$$s_d := \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = d}} |A_I|$$

avec pour tout $I = \{k_1, ..., k_d\}$, tel que $k_1 < ... < k_d$,

$$A_I := \begin{pmatrix} a_{k_1,k_1} & \cdots & a_{k_1,k_d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k_d,k_1} & \cdots & a_{k_d,k_d} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{K})$$

(c'est la matrice obtenue en ne gardant de A que les lignes et les colonnes $k_1, , , k_d$).

Démonstration : On pose $P(X_1, ..., X_n) := \begin{vmatrix} X_1 - a_{1,1} & -a_{1,2} & \ldots & \\ -a_{2,1} & X_2 - a_{2,2} & \ldots & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & X_n - a_{n,n} \end{vmatrix}$.

C'est un polynôme en les variables $X_1, ..., X_n$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On montre par récurrence sur k que pour $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$, le coefficient devant le monôme $X_{i_1} ... X_{i_k}$ est :

$$(-1)^{n-k} \text{dét}\, A^I$$

où $I := \{i_1, ..., i_k\}$ et A^I est la matrice obtenue à partir de A en retirant les lignes et les colonnes $i_1, ..., i_k$ (il suffit de développer par rapport à la ligne i_1 puis $i_2, ...$).

En particulier,

$$P(X, ...X) = \chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n}|A^{\{i_1,...,i_k\}}|)X^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}(\sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n}|A_{\{i_1,...,i_k\}}|)X^{n-k} \ .$$

<u>*q.e.d.*</u>

À retenir : le polynôme $\chi_A(X)$ est unitaire † de degré n et :

$$s_1 = \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} =: \mathrm{tr}A$$
$$s_2 = \sum_{1\leq i<j\leq n}\begin{vmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j}\end{vmatrix}$$
$$s_n = \text{dét}\, A \ .$$

Définition 13 (deux définitions équivalentes de la trace) *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la trace de A par :*

$$\mathrm{tr}A := -\ \textit{le coefficient devant } X^{n-1} \textit{ dans } \chi_A(X)$$

ou par :

$$\mathrm{tr}A := \textit{ la somme des coefficients diagonaux de } A.$$

Théorème 5.2 (polynôme caractéristique d'un produit) *Soient m, n des entiers ≥ 1. Si $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, alors :*

$$AB \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K}) \text{ et } BA \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

et :

$$X^n\chi_{AB}(X) = X^m\chi_{BA}(X)$$

dans $\mathbb{K}[X]$.

En particulier, si $m = n$ alors :

$$\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X) \ .$$

†. *c-à-d* son coefficient de plus haut degré est 1.

Démonstration : On pose :

$$M := \left(\begin{array}{c|c} XI_m & -A \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) \text{ et } N := \left(\begin{array}{c|c} I_m & A \\ \hline B & XI_n \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{m+n}(\mathbb{K}) \ .$$

On a alors :

$$MN = \left(\begin{array}{c|c} XI_m - AB & 0 \\ \hline XB & XI_n \end{array}\right)$$

donc :

$$\begin{aligned} \text{dét}\,(MN) &= \text{dét}\,(XI_m - AB)\text{dét}\,(XI_n) \\ &= X^n \chi_{AB}(X) \ . \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$NM = \left(\begin{array}{c|c} XI_m & 0 \\ \hline XB & XI_n - BA \end{array}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} \text{dét}\,(NM) &= \text{dét}\,(XI_m)\text{dét}\,(XI_n - BA) \\ &= X^m \chi_{BA}(X) \ . \end{aligned}$$

Or, $\text{dét}\,(MN) = \text{dét}\,(NM) = \text{dét}\,M \text{dét}\,N$. *q.e.d.*

Remarque : — Si $A, A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont des matrices semblables *i.e.* si

$$^{\exists}P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ A = PA'P^{-1}$$

alors :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \chi_{P(A'P^{-1})}(X) \\ &= \chi_{(A'P^{-1})P}(X) \\ &= \chi_{A'}(X) \end{aligned}$$

autrement dit deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

En conséquence, on peut définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme :

Définition 14 *Supposons que E est de dimension finie. Si u est un endomorphisme de E, alors toutes les matrices de u dans une base de E sont semblables donc ont le même polynôme caractéistique. Ce polynôme caractéristique commun est le polynôme caractéristique de u, noté $\chi_u(X)$.*

Concrétement, si $(e) = e_1, ..., e_n$ est une base de E, si u est un endomorphisme de E, alors :

$$\chi_u(X) = \chi_A(X)$$

où $A := \mathrm{Mat}(u)_{(e)}$.

Spectre et racines du polynôme caractéristique

On peut réécrire la proposition 5.1 :

Théorème 5.3 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$\mathrm{Sp}(A) = \{ \textit{ valeurs propres de } A \} = \{ \textit{ racines de } \chi_A(X) \}$$

Démonstration : On a λ valeur propre de $A \Leftrightarrow \text{dét}\,(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$. *q.e.d.*

En particulier :

Corollaire 5.3.1 *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, A possède au plus n valeurs propres.*

(En effet, nous savons qu'un polynôme de degré n a au plus n racines).

Exemple : [s]

— Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$\chi_A(X) = X^2 - X - 1 = (X - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2})$$

donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$ mais $\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}}(A) = \emptyset$.

— Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, alors :

$$\chi_A(X) = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$$

où $j := -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc dans ce cas :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{j, j^2\right\}$$

mais $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

Cas des matrices triangulaires :

Soit

$$T := \begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots\ 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

une matrice triangulaire supérieure. Alors :

$$\begin{aligned} \chi_T(X) &= \begin{vmatrix} X - t_{1,1} & \cdots & -t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots\ 0 & X - t_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (X - t_{i,i}) \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(T) = \{t_{i,i} \ : \ 1 \leq i \leq n\}$.

Matrices compagnons :

Soit $P(X) := X^n + c_{n-1}X^{n-1} + ... + c_0 \in \mathbb{K}[X]$. On pose :

$$C_P := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

c'est la *matrice compagnon* du polynôme P.

Proposition 5.4

$$\chi_{C_P}(X) = P(X) \ .$$

Démonstration : Par récurrence sur $n \geq 1$. Si $n = 1$ c'est évident car $P(X) = X + c_0$ et $C_P = (-c_0)$ (matrice 1×1).

Si $P(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + ... + c_0$, on a :

$$\chi_{C_P}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + c_{n-1} \end{vmatrix}$$

(en développant par rapport à la première ligne)

$$= X \underbrace{\begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + c_{n-1} \end{vmatrix}}_{\substack{= X^{n-1} + c_{n-1} X^{n-2} + \ldots + c_1 \\ \text{par hypothĕse de récurrence}}} + (-1)^{n+1} c_0 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{= (-1)^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} &= X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \ldots + c_0 \\ &= P(X) \end{aligned}$$

(ce qui achève la récurrence).

<u>*q.e.d.*</u>

Exemple : Soit J la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

alors $\chi_J(X) = X^n - 1$ car $J = C_{X^n - 1}$.

Exercice 25 (Polynômes de Tchébychev) *On rappelle le résultat suivant :*

Pour tout k entier ≥ 1, il existe un polynôme en t, à coefficients rationnels, noté $T_k(t)$, tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(k\theta) = \sin\theta\, T_k(\cos\theta)$$

(en effet :

$$\begin{aligned} \sin(k\theta) &= \operatorname{Im}\left(e^{ik\theta}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left((\cos\theta + i \sin\theta)^k\right) \end{aligned}$$

et on développe ...)

Par exemple, $\sin(2\theta) = \sin\theta(2\cos\theta)$ *et* $\sin(3\theta) = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)$ *donc* $T_2(t) = 2t$ *et* $T_3(t) = 4t^2 - 1$*. Plus généralement,* $T_k(t) = 2^{k-1} t^{k-1} + \ldots$

Pour tout n soit :

$$V_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

alors, pour tout $n \geq 1$:

$$\chi_{V_n}(X) = T_{n+1}(\frac{X}{2})$$

en particulier,

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(V_n) = \left\{ 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) : \ 1 \leq k \leq n \right\} \ .$$

Indications : vérifier que $\chi_{V_n}(X) = T_{n+1}(\frac{X}{2})$ pour $n = 1, 2$ et trouver une relation de récurrence d'ordre 2 pour $\chi_{V_n}(X)$ (en développant par rapport à une ligne ou une colonne) et une autre pour $T_n(X)$.

Corollaire 5.4.1 *Soit A une matrice réelle. Alors, A possède un sous-espace invariant de dimension* 1 *ou* 2*.*

Démonstration : Soit $n \geq 1$. Comme $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, A possède une valeur propre $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, a, b réels, et un vecteur propre associé $Z = X + iY \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ où $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

Alors :

$$AZ = \lambda Z \Leftrightarrow AX + iAY = (aX - bY) + i(bX + aY)$$

$$\Leftrightarrow AX = aX - bY \text{ et } AY = bX + aY$$

et en particulier le sous-espace (réel) $\langle X, Y \rangle$ est stable par A. Or X ou $Y \neq 0$ donc $\langle X, Y \rangle$ est de dimension 1 ou 2. *q.e.d.*

5.3 Espaces propres

Définition 15 *Soit u un endomorphisme de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'espace propre de u associé à λ est le sous-espace* $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ *de E. On le note :*

$$E_\lambda(u) := \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

$$= \{x \in E \ : \ u(x) = \lambda x\} \ .$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'espace propre de A associé à la valeur propre λ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$ (l'espace des vecteurs colonnes à n coefficients) défini par :

$$E_\lambda(A) := \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ : \ AX = \lambda X\} \ .$$

Remarque : [s]

— Si λ est une valeur propre de u (ou de A), l'espace propre associé $E_\lambda(u)$ (ou $E_\lambda(A)$ est de dimension ≥ 1 ;

— L'espace propre $E_\lambda(u)$ est laissé stable par u. En effet :

$$x \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \Rightarrow u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

$$\Rightarrow u(x) \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \ .$$

Théorème 5.5 *Soit u un endomorphisme de E. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_r$ r valeurs propres* **distinctes** *de u. Alors les espaces propres associés $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_r}$ sont en somme directe* i.e. *:*

$$E_{\lambda_1} + ... + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus .... \oplus E_{\lambda_r} \ .$$

Remarque : On en déduit que le nombre de valeurs propres est $\leq \dim E$ car :

$$\dim E \geq \dim E_{\lambda_1} \oplus .... \oplus E_{\lambda_r} = \dim E_{\lambda_1} + ... + \dim E_{\lambda_r} \geq r \ .$$

Démonstration du théorème : Par récurrence sur $r \geq 1$. Si $r = 1$, il n'y a rien à démontrer.

Soient $v_1 \in E_{\lambda_1}, ..., v_r \in E_{\lambda_r}$ tels que

$$v_1 + ... + v_r = 0 \tag{1}$$

alors si on applique u, on trouve :

$$u(v_1) + ... + u(v_r) = 0 \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = 0 \tag{3}$$

mais alors (1) - λ_1 x (3) donne :

$$(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + ... + (\lambda_r - \lambda_1)v_r = 0$$

$\Rightarrow$(hypothèse de récurrence de rang $r-1$)$\Rightarrow$:

$$(\lambda_2-\lambda_1)v_2 = ... = (\lambda_r-\lambda_1)v_r = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = ... = v_r = 0$$

car $\lambda_2-\lambda_1, ..., \lambda_r-\lambda_1 \neq 0$.

On a donc aussi : $v_1 = -v_2 - ... - v_r = 0$. *q.e.d.*

Corollaire 5.5.1 *Soit u un endomorphisme de E. Si E est de dimension n et si le polynôme carctéristique $\chi_u(X) \in \mathbb{K}[X]$ admet n racines distinctes dans $\mathbb{K}$, alors il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.*

Démonstration : Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ les $n-$racines distinctes de $\chi_u(X)$. Ce sont aussi n valeurs propres de u. Notons E_{λ_1},...,E_{λ_n} les espaces propres associés. Alors : $E_{\lambda_1} + ... + E_{\lambda_n} \subseteq E$ et :

$$\dim(E_{\lambda_1} + ... + E_{\lambda_n}) = \dim(E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_n})$$

$$= \dim E_{\lambda_1} + ... + \dim E_{\lambda_n} \geq n = \dim E$$

donc :

$$^\forall 1 \leq i \leq n, \dim E_{\lambda_i} = 1 \text{ et } E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_n} = E \ .$$

Pour tout i, soit e_i un vecteur non nul tel que :

$$E_{\lambda_i} = \mathbb{K}e_i$$

alors les vecteurs e_i sont des vecteurs propres de u (de valeurs propres λ_i) et

$$\mathbb{K}e_1 + ... + \mathbb{K}e_n = \mathbb{K}e_1 \oplus ... \oplus \mathbb{K}e_n = E$$

signifie que les e_i forment une base de $\mathbb{K}^n$. *q.e.d.*

Remarque : Bien entendu la réciproque est fausse car par exemple si $n \geq 2$, toute base de E est formée de vecteurs propres de Id_E et le polynôme caractéristique de Id_E est $\chi_{\mathrm{Id}_E}(X) = (X-1)^n$ qui n'a qu'une seule racine : 1.

Définition 16 (diagonalisable) *On dit qu'un endomorphisme u de E est diagonalisable s'il existe une base de E) formée de vecteurs propres de u.*

Remarque : Si u est diagonalisable et si on note $\lambda_1, ..., \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes, alors :

$$\ker(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \oplus .... \oplus \ker(u - \lambda_r \mathrm{Id}_E) = E$$

(car tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs propres de u donc est une somme de vecteurs appartenant aux espaces propres $\ker(u - \lambda_i)$) et réciproquement, si :

$$\ker(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \oplus .... \oplus \ker(u - \lambda_r \mathrm{Id}_E) = E$$

alors, il existe une base de E formée de vecteurs propres de u (il suffit de mettre « bout à bout » des bases des espaces propres $\ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$).

En bref :

$$u \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \ker(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \oplus .... \oplus \ker(u - \lambda_r \mathrm{Id}_E) = E \ .$$

Définition 17 *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A = PDP^{-1}$.*

Remarque :

Si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} ,$$

alors les $\chi_A(X) = \chi_D(X) = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_n)$ et donc les λ_i sont les valeurs propres de A (et les racines de $\chi_A(X)$).

Diagonaliser une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ signifie trouver, si elles existent, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1} \ .$$

Exemple :

— Toute matrice diagonale est diagonalisable.

— Toute matrice réelle 2×2 symétrique :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

est diagonalisable (*exo*) — La matrice de permutation circulaire

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ de valeurs propres

$$1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, ..., e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

les racines $n-$ièmes de l'unité. Trouver une base de vecteurs propres (*exo*) .

Proposition 5.6 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de base $e_1, ..., e_n$. Soit u un endomorphisme de E et soit A la matrice de u dans la base $e_1, ..., e_n$. Alors u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration : Si u est diagonalisable dans une base $e'_1, ..., e'_n$, si on note P la matrice de passage de la base e dans la base e', alors si on note D la matrice de u dans la base e', on a : $A = PDP^{-1}$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où pour tout i, λ_i est la valeur propre associée au vecteur propre e'_i. Réciproquement, si $A = PDP^{-1}$, alors les vecteurs $v_j := \sum_{i=1}^n P_{i,j} e_i$, $1 \leq j \leq n$, forment une base de vecteurs propres de u : $u(v_j) = D_{j,j} v_j$ ($^\forall j$).

q.e.d.

5.4 Un premier critère de diagonalisabilité

Pour énoncer un premier critère de diagonalisation des endomorphismes on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 5.7 *Soit u un endomorphisme de E. On suppose E de dimension finie et on suppose aussi qu'il existe un sous-espace F de E laissé stable par u. Notons $\chi_{u|_F}$ le polynôme caractéristique de la restriction à F. Alors :*

$$\chi_{u|_F}(X) | \chi_u(X)$$

dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration : Soit $e_1, ..., e_k$ une base de F que l'on complète en une base de E :

$$e_1, ..., e_n$$

alors la matrice de u dans la base $e_1, ..., e_n$ est de la forme :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overset{k}{\longleftrightarrow} & \overset{n-k}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} k \updownarrow \\ \\ n-k \updownarrow \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \end{array}$$

(où A est la matrice de $u|_F$ dans la base $e_1, .., e_k$). Mais alors :

$$\chi_u(X) = \left|\begin{array}{c|c} XI_k - A & -B \\ \hline 0 & XI_{n-k} - D \end{array}\right| = \text{dét}\,(XI_k - A)\text{dét}\,(XI_{n-k} - D)$$

$$= \chi_{u|_F}\,\text{dét}\,(XI_{n-k} - D)\ .$$

<u>*q.e.d.*</u>

Définition 18 (multiplicités algébrique et géométrique) *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On notera $m_a(\lambda)$ la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de A, $\chi_A(X)$:*

$$m_a(\lambda) := \textit{ le plus grand entier } m \textit{ tel que } (X - \lambda)^m | \chi_A(X)$$

c'est la multiplicité algébrique de λ. On notera :

$$m_g(\lambda) := \dim_{\mathbb{K}} \ker(A - \lambda I_n)$$

c'est la multiplicité géométrique de λ.

Corollaire 5.7.1 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ou soit u un endomorphisme de E, si E est de dimension finie. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)\ .$$

Exemple : Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

alors $\chi_A(X) = (X-1)^n$ et $m_g(1) = 1 < m_a(1) = n$.

Si $A = I_n$, alors : $\chi_A(X) = (X-1)^n$ et $m_g(1) = m_a(1) = n$.

Démonstration : Soit λ une valeur propre de u. Posons $F := \ker(u - \lambda)$ l'espace propre associé.

Alors F est stable par u :

en effet, si $x \in F$, alors :

$$u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

donc $u(x) \in F$.

Donc d'après le lemme 5.7,

$$\chi_{u|_F}(X) \;\Big|\; \chi_u(X)$$

or :

$$^\forall x \in F\,, u(x) = \lambda x$$

donc $u|_F = \lambda \mathrm{Id}_F$ et

$$\begin{aligned} \chi_{u|_F}(X) &= (X-\lambda)^{\dim F} \\ &= (X-\lambda)^{m_g(\lambda)} \end{aligned}$$

et finalement,

$$(X-\lambda)^{m_g(\lambda)} \;\Big|\; \chi_u(X) \Rightarrow m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)\ .$$

q.e.d.

Voici un premier critère de diagonalisabilité :

Théorème 5.8 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ (respectivement u un endomorphisme de E avec E de dimension finie). Alors :*

$$A \textit{ (respectivement } u\textit{) est diagonalisable sur } \mathbb{K} \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \chi_A(X) \textit{ est scindé sur } \mathbb{K}\,; \\ \text{et} \\ ii)^\forall \lambda, \textit{ valeur propre de } A,\ m_a(\lambda) = m_g(\lambda)\ . \end{cases}$$

En particulier, si $\chi_A(X)$ est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable. *Démonstration :* $\Rightarrow$: Supposons u diagonalisable. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u. Comme :

$$\ker(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \oplus ... \oplus \ker(u - \lambda_r \mathrm{Id}_E) = E\,,$$

si on choisit des bases $\mathscr{B}_1$ de $\ker(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)$, ..., $\mathscr{B}_r$ de $\ker(u - \lambda_r \mathrm{Id}_E)$, on obtient une base $\mathscr{B}_1 \cup ... \cup \mathscr{B}_r$ de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\mathrm{Mat}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & \lambda_r I_{n_r} \end{array}\right)$$

où $n_i = m_g(\lambda_i) = \dim \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ pour tout i. Donc :

$$\chi_u(X) = (X - \lambda_1)^{n_1} ... (X - \lambda_r)^{n_r} \ .$$

Par conséquent le polynôme $\chi_u(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et :

$$\forall i, \ m_a(\lambda_i) = n_i = m_g(\lambda_i) \ .$$

$\Leftarrow$: Supposons que :

$$\chi_u(X) = (X - \lambda_1)^{n_1} ... (X - \lambda_r)^{n_r}$$

pour certains $\lambda_i \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts et certains entiers $n_i \geq 1$. Comme :

$$\ker(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) + ... + \ker(u - \lambda_r \mathrm{Id}_E) = \ker(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \oplus ... \oplus \ker(u - \lambda_r \mathrm{Id}_E) \subseteq E \,,$$

on a :

$$\begin{aligned} m_g(\lambda_1) + ... + m_g(\lambda_r) &= \dim\left(\ker(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) + ... + \ker(u - \lambda_r \mathrm{Id}_E)\right) \\ &\leq \dim E \ . \end{aligned}$$

Or, pour tout i, $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) = n_i$ et

$$n_1 + ... + n_r = \deg \chi_u = \dim E$$

en conséquence :

$$\dim\left(\ker(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) + ... + \ker(u - \lambda_r \mathrm{Id}_E)\right) = \dim E$$

et forcément,

$$\ker(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) + ... + \ker(u - \lambda_r \mathrm{Id}_E) = E \ .$$

<u>*q.e.d.*</u>

Exemple : Si $n \geq 2$, la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

n'est jamais diagonalisable car $m_g(0) = 1 < m_a(0) = n$.

Exercice 26 *Soit* $V_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Alors* $V_n = PDP^{-1}$ *où* $D = \mathrm{diag}(..., 2\cos(k\pi/(n+1)), ...)$ *et* $P = (\sin(ij\pi/(n+1)))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Indication : pour tout $1 \leq k \leq n$, *le vecteur* $\begin{pmatrix} \sin x \\ \vdots \\ \sin((n-1)x) \end{pmatrix}$ *est propre associé à la valeur propre* $2\cos(k\pi/(n+1))$ *si* $x = k\pi/(n+1)$.

cours du jeudi 30 spetembre 2015

5.5 Trigonalisation

Définition 19 *On dit qu'une matrice* $A \in \mathscr{M}_n(K)$ *(respectivement un endomorphisme u de E, si E est de dimension finie) est trigonalisable sur* $\mathbb{K}$ *(on devrait dire triangularisable mais ce terme signifie déjà autre chose) si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure c-à-d :*

$$^{\exists}P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\, T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\, ^{\forall}n \geq i > j \geq 1,\, T_{i,j} = 0 \text{ et } A = PTP^{-1}$$

(respectivement il existe une base de E où la matrice de u est triangulaire supérieure).

Exercice 27 *Toute matrice triangulaire inférieure est trigonalisable (si T est triangulaire inférieure,* $w_0 T w_0^{-1}$ *est triangulaire supérieure où :*

$$w_0 := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & 0 \\ 0 & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} .$$

Théorème 5.9 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration : $\Rightarrow$: Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc il suffit de montrer que $\chi_T(X)$ est scindé pour toute matrice triangulaire supérieure T ; ce qui est facile.

$\Leftarrow$: On raisonne aves u un endomorphisme de E (et on suppose E de dimension finie). Par récurrence sur $\dim E$. Si $\dim E = 1$, il n'y a rien à démontrer. Si $\dim E > 1$, alors comme $\chi_u(X)$ est scindé,

$$\chi_u(X) = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_n)$$

où $n = \dim E$ et où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ne sont pas forcément distincts. Soit e_1 un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1. On complète e_1 en une base : $e_1, ..., e_n$. Dans cette base, la matrice de u est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & l \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

où $B \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $l \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$. En particulier,

$$\chi_u(X) = (X - \lambda_1)\chi_B(X)$$

$$\Rightarrow \chi_B(X) = (X - \lambda_2)...(X - \lambda_n)$$

est scindé sur $\mathbb{K}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $S \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure et $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ une matrice inversible telles que :

$$B = QSQ^{-1}$$

alors, on peut vérifier que :

$$\mathrm{Mat}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & l \\ \hline 0 & QSQ^{-1} \end{array}\right)$$

$$= P \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & lQ \\ \hline 0 & S \end{array}\right) P^{-1}$$

pour la matrice inversible :

$$P := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right) .$$

Donc la matrice de u dans la base $e_1, ..., e_n$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & lQ \\ \hline 0 & S \end{array}\right)$$

donc u est trigonalisable. <u>*q.e.d.*</u>

Corollaire 5.9.1 *Sur $\mathbb{C}$ toutes les matrices sont trigonalisables.*

Relations entre les valeurs propres et les invariants

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de la forme :

$$(4) \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donc :

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_n)$$

ainsi les coefficients diagonaux de (4) ne dépendent que de A :

ce sont les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité algébrique.

Exercice 28 *Vérifier que*

$$\text{dét}\, A = \lambda_1 ... \lambda_n$$

$$^{\forall}k \geq 1,\ \text{tr}A^k = \lambda_1^k + ... + \lambda_n^k \ .$$

On peut en déduire la belle formule suivante :

$$^{\exists}\epsilon > 0,\ ^{\forall}|t| < \epsilon\,,$$

la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{tr}(A^k)}{k} t^k$ converge, la matrice $I_n - tA$ est inversible et :

$$e^{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{tr}A^k}{k} t^k\right)} = \frac{1}{\text{dét}\,(I_n - tA)} \ .$$

6 Polynômes d'endomorphismes

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

6.1 Définition

On remplace X^k par u^k (ou A^k) et 1 par Id_E (ou I_n).
Soit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On pose :

$$P(u) := a_0\mathrm{Id}_E + a_1u + a_2u^2 + ... \text{ et } P(A) := a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + ...$$

Proposition 6.1 *L'application :*

$$\mathbb{K}[X] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \, , \; P(X) \mapsto P(A)$$

est un morphisme d'algèbres i.e. *: c'est linéaire et :*

$$^{\forall}P, Q \in \mathbb{K}[X] \, , \; (PQ)(A) = P(A)Q(A)$$

de même l'application :

$$\mathbb{K}[X] \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) \, , \; P(X) \mapsto P(u)$$

est aussi un morphisme d'algèbres.

Démonstration : Si $P(X) = a_0 + a_1X + ...$ et $Q(X) = b_0 + b_1X + ...$, alors $PQ(X) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + ...$ Donc :

$$(PQ)(A) = a_0b_0I_n + (a_0b_1 + a_1b_0)A + ...$$

$$= (a_0I_n + a_1A + ...)(b_0I_n + b_1A + ...)$$
$$= P(A)Q(A) \; .$$

<u>*q.e.d.*</u>

Remarque : [importante] En particulier, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent :

$$P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$$

de même les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.
Exemple : — **Polynôme d'une diagonale :**

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on a :

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

— **polynôme et conjugaison :** Si Q est inversible, si $A = QA'Q^{-1}$, alors pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = QP(A')Q^{-1}$.

Exercice 29 *Montrer que plus généralement, pour une matrice triangulaire :*

$$T := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on a :

$$P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ (les coefficients hors de la diagonale peuvent avoir une expression compliquée mais les coefficients diagonaux sont obtenus simplement en leur appliquant le polynôme P).

6.2 Théorème de Cayley-Hamilton

Définition 20 *On dit qu'un polynôme $P(X)$ est un polynôme annulateur de la matrice A ou de l'endomorphisme u si $P(A) = 0$, ou si $P(u) = 0$.*

EXEMPLE : — Si $p : E \to E$ est une projection, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p car $p^2 = p$.

— Si $r : E \to E$ est une réflexion, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de r car $r^2 = \mathrm{Id}_E$.

Où chercher les valeurs propres, connaissant un polynôme annulateur mais ne connaissant pas le polynôme caractéristique ?

Proposition 6.2 *Si P est un polynôme annulateur de u, respectivement de A, alors :*

$$\mathrm{Sp}(u) \subseteq \{ \text{ racines de } P \ \}$$

respectivement

$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{ \text{ racines de } P \ \} \ .$$

Démonstration : Si x est un vecteur propre de u associé à une valeur propre λ, alors :

$$u(x) = \lambda x \Rightarrow {}^{\forall}k \geq 0\,, u^k(x) = \lambda^k x$$

et plus généralement :

$$Q(u)(x) = Q(\lambda)x$$

pour tout polynôme $Q(X)$. En particulier : $P(u)(x) = 0 \Rightarrow P(\lambda)x = 0$ $\Rightarrow P(\lambda) = 0$ car $x \neq 0$. <u>*q.e.d.*</u>

Théorème 6.3 (de Cayley-Hamilton) *Si E est de dimension finie,*

$$\chi_u(u) = 0$$

de même $\chi_A(A) = 0$.

Exemple : — Si :

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\, 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\,,$$

alors : $\chi_N(X) = X^n$ et $\chi_J(X) = X^n - 1$ et on a bien $N^n = 0$ et $J^n = I_n$.

Démonstration (s) du théorème :

1ère démonstration (algébrique) :

Notons $B(X) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ la transposée de la comatrice de $XI_n - A$. Tous les coefficients de la matrice $B(X)$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $\leq n-1$. Il existe donc des matrices :

$$B_0, ..., B_{n-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

telles que :

$$B(X) = B_0 + XB_1 + ... + X^{n-1}B_{n-1}\ .$$

On a alors :

$$B(X)(XI_n - A) = \text{dét}\,(XI_n - A)I_n$$

$$\Leftrightarrow (B_0 + XB_1 + ... + X^{n-1}B_{n-1})(XI_n - A) = \chi_A(X)I_n$$

(on développe la partie gauche)

$$\Leftrightarrow -B_0A + X(B_0 - B_1A) + X^2(B_1 - B_2A) + ... + X^{n-1}(B_{n-2} - B_{n-1}A) + X^nB_{n-1}$$

$$(5) \qquad = \chi_A(X) I_n$$

Notons $c_0, ..., c_n \in \mathbb{K}$ les coefficients du polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = c_0 + ... + c_n X^n$$

($c_0 = \pm \mathrm{dét}\, A, c_n = 1$) On a donc d'après (5) :

$$-B_0 A = c_0 I_n$$

$$B_0 - B_1 A = c_1 I_n$$

$$...$$

$$B_{n-1} = c_n I_n$$

et donc :

$$\chi_A(A) = c_0 I_n + c_1 A + ... + c_n A^n$$

$$= -B_0 A + (B_0 - B_1 A)A + (B_1 - B_2 A)A^2 + ... + (B_{n-2} A^{n-1} - B_{n-1})A^{n-1} + B_{n-1} A^n$$

$$= 0$$

car « tout se simplifie » .

2ème démonstration (avec les matrices compagnons) : On suppose E de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de E. Soit v un vecteur non nul de E. Soit $1 \leq k \leq n$ le plus grand entier tel que la famille :

$$v, u(v), ..., u^{k-1}(v)$$

soit libre. Alors forcément, la famille

$$v, u(v), ..., u^{k-1}(v), u^k(v)$$

est liée et

$$u^k(v) + c_{k-1} u^{k-1}(v) + ... + c_0 v = 0$$

pour certains coefficients $c_0, ..., c_{k-1} \in \mathbb{K}$.

Posons : $F := \langle v, u(v), ..., u^{k-1}(v) \rangle$. C'est un sous-espace vectoriel de E (de dimension k) stable par u. De plus la matrice de la restriction $u|_F$ dans la base

$$v, u(v), ..., u^{k-1}(v)$$

est la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots \; 0 & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice compagon donc :

$$\chi_A(X) = X^k + c_{k-1}X^{k-1} + ... + c_0 \ .$$

D'après le lemme 5.7, $\chi_A(X)$ divise $\chi_u(X)$ *c-à-d* :

$$\chi_u(X) = Q(X)\chi_A(X)$$

pour un certain polynôme $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$. On a alors :

$$\chi_u(u)(v) = Q(u)\chi_A(u)(v)$$

$$= Q(u)(u^k(v) + c_{k-1}u^{k-1}(v) + ... + c_0 v)$$

$$= Q(u)(0) = 0$$

finalement $\chi_u(u)(v) = 0$ pour tout vecteur v de E et $\chi_u(u) = 0$.

3ème démonstration (par les matrices triangulaires) :

Supposons que T est une matrice triangulaire :

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & t_n \end{pmatrix} \ .$$

Soient

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On pose aussi :

$$V_k := \langle e_1, ..., e_k \rangle$$

si $1 \leq k \leq n$ et $V_0 := 0$. On a alors :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \ (T - t_k I_n)(V_k) \subseteq V_{k-1}$$

donc :

$$(T - t_1 I_n)...(T - t_n I_n)(\mathbb{K}^n) = (T - t_1 I_n)... \underbrace{(T - t_n I_n)(V_n)}_{\subseteq V_{n-1}}$$

$$\begin{aligned}
&\subseteq (T - t_1 I_n)...\underbrace{(T - t_{n-1} I_n)(V_{n-1})}_{\subseteq V_{n-2}} \\
&\subseteq (T - t_1 I_n)...\underbrace{(T - t_{n-2} I_n)(V_{n-2})}_{\subseteq V_{n-3}} \\
&... \subseteq (T - t_1 I_n)(V_1) \subseteq V_0 = 0
\end{aligned}$$

donc : $(T - t_1 I_n)...(T - t_n I_n) = 0$.

Or, $\chi_T(X) = (X - t_1)...(X - t_n)$. Donc :

$$\chi_T(T) = (T - t_1 I_n)...(T - t_n I_n) = 0 \ .$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que A est trigonalisable *c-à-d* :

$$^{\exists} P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ ^{\exists} T \text{ triangulaire supérieure, } A = PTP^{-1} \ .$$

Mais alors $\chi_T(X) = \chi_A(X)$ et :

$$\chi_A(A) = P\chi_A(T)P^{-1} = P\chi_T(T)P^{-1} = 0 \ .$$

<u>*q.e.d.*</u>

6.3 Polynômes annulateurs

Un *polynôme annulateur* d'un endomorphisme u de E est un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$. Par exemple, en dimension finie : $\chi_u(X)$. Un *polynôme minimal* de u est un polynôme annulateur de u, non nul, de degré minimal.

Exemple : Des polynômes minimaux des matrices :

$$O, I_n, N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),$$

sont respectivement : $X, X - 1, X^n$.

*

Proposition 6.4 *Soit $m_u(X)$ un polynôme minimal de u. Alors, m_u* divise tous les polynômes annulateurs de *u.*

Démonstration : Si $P(u) = 0$, on fait la division euclidienne de P par m_u :
$$P = Bm_u + R$$
où $\deg R < \deg m_u$. On a :
$$0 = P(u) = \underbrace{B(u)m_u(u)}_{=0} + R(u) \Rightarrow R(u) = 0$$
et $R(X)$ est un polynôme annulateur de u de degré $< \deg m_u$. Forcément, $R = 0$ et $m_u(X) divise P(X)$. *q.e.d.*

Il existe donc au plus un *unique* polynôme minimal *unitaire* (*i.e.* son coefficient de plus haut degré vaut 1) de u (*exo*) c'est LE polynôme minimal de u.

Remarque : Si E est de dimension finie, $\chi_u(X)$ est un polynôme annulateur de u (non nul) donc dans ce cas, le polynôme minimal existe toujours de plus :
$$m_u(X) \text{ divise } \chi_u(X)$$
dans $\mathbb{K}[X]$.

On définit de même les polynômes annulateurs et le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 30 *Si E est de dimension finie, le polynôme minimal de u coïncide avec le polynôme minimal de sa matrice dans n'importe quelle base de E.*

Proposition 6.5 *Soit P un polynôme annulateur de u un endomorphisme de E. Alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $P(\lambda) = 0$. En particulier si le polynôme minimal m_u existe, $m_u(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de u.*

Démonstration : Si $u(x) = \lambda x$, $0 \neq x \in E$. Alors, $0 = P(u)(x) = P(\lambda)x \Rightarrow P(\lambda) = 0$. *q.e.d.*

Proposition 6.6 *Les racines de $m_u(X)$ sont exactement les valeurs propres de u c-à-d (si $m_u(X)$ existe) :*
$$^\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad m_u(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \ .$$

Démonstration : Il suffit de démontrer que si $m_u(\lambda) = 0$, alors λ est une valeur propre de u. Or dans ce cas, $m_u(X) = (X - \lambda)Q(X)$ pour un certain polynôme $Q(X)$ de degré $< \deg m_u(X)$. Donc :
$$0 = m_u(u) = (u - \lambda \mathrm{Id}_E)Q(u) \ .$$

Forcément $Q(u) \neq 0$ par minimalité de m_u. Donc $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective et donc λ est une valeur propre de u. *q.e.d.*

Comment trouver le polynôme minimal d'une matrice ?

Théorème 6.7 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que le polynôme caractéristique est scindé :*

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} ... (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $m_1, ..., m_r \geq 1$, $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$, sont deux à deux distincts. Alors :

$$m_A(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} ... (X - \lambda_r)^{k_r}$$

pour certains entiers : $1 \leq k_i \leq m_i$, $i = 1, ..., r$.

Démonstration : On note $k_1, ..., k_r$ les multiplicités de $m_A(X)$ en les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_r$. On a déjà vu que $1 \leq k_i$ car $m_A(\lambda_i) = 0$. On a aussi $k_i \leq m_i$, la multiplicité de λ_i dans $\chi_A(X)$, car $m_A(X) | \chi_A(X)$ *q.e.d.*

Exercice 31

A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi_A(X)$	X^4	X^4	X^4
$m_A(X)$	X^2	X^3	X^4

Exercice 32 (Polynôme minimal d'une diagonale) *Soit*

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors $m_D(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(D)} (X - \lambda)$ où $\mathrm{Sp}(D) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ et les valeurs propres sont comptées sans multiplicité.

Nouveau critère de diagonalisabilité

On dit qu'un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ est *scindé à racines simples dans* $\mathbb{K}$ s'il se factorise en :

$$P(X) = a_d(X - \lambda_1)...(X - \lambda_r)$$

où $0 \neq a_d \in \mathbb{K}$ et $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts.

Théorème 6.8 *Une matrice* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *est diagonalisable sur* $\mathbb{K}$ *si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples sur* $\mathbb{K}$.

Démonstration : $\Rightarrow$: Si A est diagonalisable, A est semblable à une diagonale. Or deux matrices semblables ont le même polynôme minimal (*exo*) . Donc il suffit de calculer le polynôme minimal d'une matrice diagonale ce qui est l'objet d'un exercice précédent.

$\Leftarrow$: Si $m_A(X) = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_r)$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{m_A(X)}$ donne :

$$\frac{1}{m_A(X)} = \frac{a_1}{X - \lambda_1} + ... + \frac{a_r}{X - \lambda_r}$$

où $a_i = \frac{1}{m'_A(\lambda_i)}$ pour tout i.

Donc

$$1 = a_1 Q_1(X) + ... + a_r Q_r(X)$$

où pur tout i :

$$Q_i(X) = \frac{m_A(X)}{X - \lambda_i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} (X - \lambda_j)$$

est un polynôme. Si on applique cette égalité à la matrice A, on trouve :

$$I_n = a_1 Q_1(A) + .. + a_r Q_r(A)$$

donc si $Z \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$Z = a_1 Q_1(A)(Z) + .. + a_r Q_r(A)(Z)$$

or, pour tout $1 \leq i \leq r$, $Q_i(A)(Z) \in \ker(A - \lambda_i I_n)$ car :

$$(A - \lambda_i I_n)(Q_i(A)(Z)) = m_A(A)(Z) = 0 \ .$$

Par conséquent

$$\oplus_{i=1}^{r} \ker(A - \lambda_i I_n) = \mathbb{K}^n$$

et A est diagonalisable.

Remarque : on peut utiliser aussi le lemme des noyaux. Si $m_A(X) = (X-\lambda_1)...(X-\lambda_r)$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, on a :

$$m_A(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{K}^n = \ker m_A(A) = \ker(A - \lambda_1 I_n) \oplus .... \oplus \ker(A - \lambda_r I_n)$$

car les polynômes $X - \lambda_i$ sont deux à deux premiers entre eux. En effet si $D(X)$ divise $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$, $i \neq j$ dans $\mathbb{K}[X]$, alors $D(X)$ divise $X - \lambda_i - (X - \lambda_j) = \lambda_j - \lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ donc $D(X)$ est constant. Donc A est diagonalisable.

q.e.d.

Lemme 6.9 (des noyaux) *Soit u un endomorphisme de E.*

Soient $P(X), Q(X)$ des polynômes premiers entre eux. ALors :

$$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u)) \ .$$

Généralisation : soient $P_1, ..., P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors :

$$\ker(P_1...P_r)(u) = \ker(P_1(u)) \oplus ... \oplus \ker(P_r(u))$$

(énoncés similaires avec des matrices)

Démonstration :

On écrit $1 = AP + BQ$ pour certains polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On a donc :

$$\mathrm{Id}_E = P(u)A(u) + Q(u)B(u) \ .$$

Soit $x \in \ker((PQ)(u))$, alors :

$$x = P(u)A(u)(x) + Q(u)B(u)(x) \ .$$

Or,

$$P(u)Q(u)B(u)(x) = B(u)P(u)Q(u)(x) = 0 \ .$$

Donc $Q(u)B(u)(x) \in \ker(P(u))$. De même, $P(u)A(u)(x) \in \ker(Q(u))$. Donc :

$$x \in \ker(P(u)) + \ker(Q(u)) \ .$$

Réciproquement, il est clair que

$$\ker(P(u)) \subseteq \ker((PQ)(u)) \text{ et } \ker(Q(u)) \subseteq \ker((PQ)(u)) \ .$$

Donc :

$$\ker(PQ)(u) = \ker P(u) + \ker Q(u)$$

montrons que cette somme est directe : soit $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$. Alors :

$$x = A(u)P(u)(x) + B(u)Q(u)(x) = 0 \ .$$

Pour le cas général : on raisonne par récurrence sur r :
Montrons d'abord que :

$$\ker(P_1(u)) + ... + \ker(P_r(u)) = \ker((P_1...P_r)(u)) \ .$$

Soit $x \in \ker((P_1...P_r)(u))$. Alors comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux, on a :

$$1 = AP_1 + BP_2$$

pour certains polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Donc en appliquant cette égalié à u :

$$x = A(u)P_1(u)(x) + B(u)P_2(u)(x)$$

or : $A(u)P_1(u)(x) \in \ker(P_2...P_r)(u)$ car :

$$(P_2...P_r)(u)A(u)P_1(u)(x) = A(u)(P_1....P_r)(u)(x) = 0 \ .$$

Donc par hypothèse de récurrence :

$$A(u)P_1(u)(x) \in \ker(P_2(u)) + ... + \ker(P_r(u))$$

et de même :

$$B(u)P_2(u)(x) \in \ker(P_1(u)) + \ker(P_3(u)) + ... + \ker(P_r(u))$$

et donc :

$$x = A(u)P_1(u)(x) + B(u)P_2(u)(x) \in \ker(P_1(u)) + ... + \ker(P_r(u)) \ .$$

Il reste à montrer que cette somme est directe :
Supposons que

$$x_1 + ... + x_r = 0$$

pour certains $x_1 \in \ker(P_1(u)), ..., x_r \in \ker((P_r(u))$. si on applique $P_1(u)$, on trouve :

$$P_1(u)(x_2) + ... + P_1(u)(x_r) = 0$$

Or, $P_1(u)(x_2) \in \ker(P_2(u)), ..., P_1(u)(x_r) \in \ker((P_r(u))$ donc par hypothèse de récurrence :

$$P_1(u)(x_2) = ... = P_1(u)(x_r) = 0$$

Or : $\ker P_1(u) \cap \ker P_i(u) = 0$ si $i > 1$ car P_1 et P_i sont premiers entre eux!. Donc :

$$x_2 = ... = x_r = 0$$

et forcément, $x_1 = 0$. <u>*q.e.d.*</u>

Corollaire 6.9.1 *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.*

Corollaire 6.9.2 *Soit u un endomorphisme de E diagonalisable sur $\mathbb{K}$. Si F est un sous-espace de E stable par u, alors la restriction $u|_F$ est encore diagonalisable.*

Démonstration : En effet,

$$m_u(u) = 0 \Rightarrow m_u(u|_F) = 0 \Rightarrow m_{u|_F} \text{ divise } m_u$$

mais si m_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$, tous ses diviseurs le sont aussi.
q.e.d.

7 Décomposition spectrale

Soient $E = \mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Objectif : (si E est de dimension finie) construire une base $\mathscr{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}(u)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_p \end{pmatrix}$$

où les T_i sont des blocs triangulaires supérieures avec diagonale constante.

7.1 Sous-espaces caractéristiques

Définition 21 *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Un vecteur propre généralisé de u de poids λ est un vecteur $v \in E$ tel que :*

$$(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m v = 0$$

pour un certain entier $m \geq 0$. Le plus petit entier m de la sorte est appelé la hauteur de v.

En particulier, les vecteurs propres sont des vecteurs propres généralisés de hauteur 1. Il est bien pratique de considérer le vecteur nul comme un vecteur propre généralisé de hauteur 0 pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple : Soit $E := \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions réelles infiniment dérivables. Considérons l'endomorphisme de dérivation $u := D : E \to E$, $f \mapsto f'$. Les vecteurs propres associés à $\lambda \in \mathbb{R}$ sont les fonctions (non nulles) proportionnelles à $e^{\lambda x}$ et les vecteurs propres généralisés sont les fonctions de la forme $p(x)e^{\lambda x}$ pour un certain polynôme $p(x)$ (en effet, si $f = e^{\lambda x} g$, alors :

$$(D - \lambda \mathrm{Id}_E)^m(f) = e^{\lambda x} g^{(m)} = 0 \Leftrightarrow g^{(m)} = 0$$

$$\Leftrightarrow g \text{ est un polynôme de degré } \leq m-1 \ .$$

La hauteur d'une telle fonction $e^{\lambda x} p(x)$ est $\deg p + 1$. En particulier, les polynômes sont les vecteurs propres généralisés associés à 0.

Remarque :

Si v est un vecteur propre généralisé de hauteur m associé à $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m-1} v$$

est un vecteur propre de poids (*c-à-d* de valeur propre) λ. Donc λ est une racine du polynôme caractéristique (si E est de dimension finie).

Exercice 33 (important) *L'ensemble des vecteurs propres généralisés de poids λ et de hauteur $\leq m$ est un sous-espace de E, stable par u : c'est exactement* $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m$.

On a une chaîne croissante de sous-espaces stables :

$$\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \subseteq \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^2 \subseteq ...$$

Définition 22 *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Le sous-espace caractéristique de u de poids λ est la réunion :*

$$E^\lambda(u) := \cup_{n=1}^\infty \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^n$$

c-à-d :

$$E^\lambda(u) = \{v \in E \ : \ ^\exists m \geq 0, \ (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m(v) = 0\}$$

c'est un sous-espace de E stable par u.

Remarque :

La suite des dimensions est croissante :

$$\dim \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \leq \dim \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^2 \leq ...$$

En dimension finie, cette suite est stationnaire donc il existe un entier m tel que : $E^\lambda(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m$.

Nous allons maintenant voir pourquoi cette notion de sous-espace caractéristique est importante.

Rappelons que pour tout λ, le sous-espace $E^\lambda(u)$ est stable par u et donc par tout polynôme en u.

Lemme 7.1 *i) Si* $\dim E^\lambda(u) < \infty$, *alors il existe une base de* $E^\lambda(u)$ *où la matrice de la restriction* $u\Big|_{E^\lambda(u)}$ *est triangulaire supérieure avec* λ *sur la diagonale :*

$$\begin{pmatrix} \lambda & \cdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda \end{pmatrix} .$$

ii) Pour tous $\mu \neq \lambda$, $(u - \mu \mathrm{Id}_E)^m$ *est injectif sur* $E^\lambda(u)$.

Démonstration : i) Soit $k := \dim(E^\lambda)$.

Notons $V_i := \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^i$ pour tout $i \geq 0$. (Donc $V_0 = \{0\}$).

Soit $m \geq 0$ le plus petit entier tel que $V_m = V_{m+1}$; Alors :

$$0 = V_0 \underset{\neq}{\subseteq} V_1 \underset{\neq}{\subseteq} \ldots \underset{\neq}{\subseteq} V_m = V_{m+1}$$

de plus :

$$v \in V_{m+2} \Leftrightarrow (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m+2} v = 0$$

$$\Leftrightarrow (u - \lambda \mathrm{Id}_E) v \in V_{m+1}$$

$$\Leftrightarrow (u - \lambda \mathrm{Id}_E) v \in V_m$$

$$\Leftrightarrow v \in V_{m+1}$$

donc $V_m = V_{m+1} = V_{m+2} = V_{m+3} = \ldots = E^\lambda$.

Soit $e_1, \ldots, e_{k_1}$ une base de $V_1 = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ que l'on complète en une base $e_1, \ldots, e_{k_2}$ de $V_2 = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^2$, que l'on complète en ......etc, que l'on complète en $e_1, \ldots, e_{k_m}$ une base de E^λ.

On a alors : $k_1 < k_2 < \ldots < k_m = k$ et pour tout $0 \leq i \leq m$:

$$V_i = \langle e_1, \ldots, e_{k_i} \rangle \ .$$

Or pour tout $i \geq 1$:

$$(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(V_i) \subseteq V_{i-1}$$

en particulier,

$$^\forall k_{i-1} < j \leq k_i,\ u(e_j) = \lambda e_j \bmod \langle e_1, \ldots, e_{k_{i-1}} \rangle$$

et la matrice de la restriction

$$u|_{E^\lambda}$$

dans la base $e_1, \ldots e_{k_m}$ est triangulaire de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda \end{pmatrix} .$$

ii) Il suffit de montrer que $(u - \mu \mathrm{Id}_E)$ est injectif sur $E^\lambda(u)$ *c-à-d* :

$$\ker(u - \mu \mathrm{Id}_E) \cap E^\lambda(u) = 0$$

or, si $(u - \mu \mathrm{Id}_E)(x) = 0$ et $x \in E^\lambda(u)$, alors :

$$\begin{aligned}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) &= (u - \mu \mathrm{Id}_E)(x) + (\mu - \lambda)x \\ &= (\mu - \lambda)x \\ \forall l \geq 0,\ (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^l(x) &= (\mu - \lambda)^l x \\ &\Rightarrow (\mu - \lambda)^l x = 0\end{aligned}$$

pour l assez grand car $x \in E^\lambda(u)$. Donc $x = 0$, car $\mu \neq \lambda$. <u>*q.e.d.*</u>

Proposition 7.2 *Si E est de dimension finie, alors le sous-espace caractéristique de u de poids λ est de dimension la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$:*

$$\dim E^\lambda(u) = m_a(\lambda) \ .$$

Démonstration : Soit $e_1, ..., e_k$ une base de $E^\lambda(u) =: E^\lambda$ où la matrice de la restriction $u\big|_{E^\lambda(u)}$ est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda \end{pmatrix} \ .$$

Donc $\chi_{u|_{E^\lambda}}(X) = (X - \lambda)^k$.

On complète la base $e_1, ..., e_k$ en :

$$e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n$$

une base de E.

Remarquons que E^λ est stable par u en effet :

$$(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m(v) = 0 \Rightarrow (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m.u(v) = u.(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m(v) = 0 \ .$$

Dans cette base, la matrice de u est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} B & ? \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

où $D \in \mathscr{M}_{n-k}(\mathbb{K})$.

Donc :

$$\chi_u(X) = (X - \lambda)^k \chi_D(X)$$

il reste donc à montrer que $\chi_D(\lambda) \neq 0$. Sinon, il existerait $0 \neq w \in \langle e_{k+1}, ..., e_n \rangle$ tel que : $Dw = \lambda w$.

Mais alors :

$$u(w) = \lambda w + y$$

avec $y \in E^\lambda$. Donc :

$$(u - \lambda \mathrm{Id}_E)w \in E^\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m$$
$$\Rightarrow (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m+1} w = 0$$
$$\Rightarrow w \in E^\lambda \cap \langle e_{k+1}, ..., e_n \rangle$$
$$\Rightarrow w = 0$$

contradiction ! *q.e.d.*

Proposition 7.3 *Les sous-espaces caractéristiques de poids distincts $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont en somme directe*

Démonstration : Soient $v_1, ..., v_r$ tels que :

$$v_1 + ... + v_r = 0$$

et $v_i \in E^{\lambda_i}$ pour tout i.

Pour tout i, il existe un entier k_i tel que :

$$v_i \in \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{k_i}$$

il suffit donc de vérifier que les polynômes $(X - \lambda_i)^{k_i}$ sont deux à deux premiers entre eux car alors : les sous-espaces $\ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{k_i}$ sont en somme directe d'après le lemme des noyaux et $v_1 = ... = v_r = 0$. Nous allons montrer que $P(X) = (X - \lambda)^m$, $Q(X) = (X - \mu)^n$, m, n entiers ≥ 1, $\lambda \neq \mu \in \mathbb{K}$ sont premiers entre eux. Soit $c := \frac{1}{\mu - \lambda}$. On a :

$$1 = c((X - \lambda) - (X - \mu))$$

en élevant à la puissance $m + n - 1$:

$$1 = c^{m+n-1}(r(X)(X - \lambda)^m + s(X)(X - \mu)^n)$$

pour certains polynômes $r(X), s(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degrés respectifs $\leq n - 1$ et $\leq m - 1$ (*exo*) (utiliser la formule du binôme). Donc, $P(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux. *q.e.d.*

Théorème 7.4 *Supposons E de dimension finie. Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$, alors :*

$$E = \oplus_{i=1}^r E^{\lambda_i}$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont les racines distinctes de $\chi_u(X)$.

Démonstration : On a déjà vu que la somme est directe. Si $\chi_u(X) = (X - \lambda_1)^{m_1}...(X-\lambda_r)^{m_r}$, alors d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$ donc :

$$E = \oplus_i \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i} \subseteq \oplus_i E^{\lambda_i} \ .$$

q.e.d.

Interprétation géométrique des multiplicités du polynôme minimal

Supposons que E est de dimension finie et que le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, comme le polynôme minimal $m_u(X)$ de u divise $\chi_u(X)$, $m_u(X)$ est aussi scindé sur $\mathbb{K}$. Factorisons-le :

$$m_u(X) = (X - \lambda_1)^{k_1}...(X-\lambda_r)^{k_r}$$

pour certains $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et certains entiers $k_i \geq 1$.

Théorème 7.5 *Pour tout $1 \leq i \leq r$, k_i est aussi le plus petit entier m tel que*

$$\ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^m = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m+1} (= E^{\lambda_i})$$

Démonstration : Notons m_i le plus petit entier m tel que

$$\ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^m = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m+1} ,$$

pour tout i. Alors :

$$E = \oplus_i E^{\lambda_i} = \oplus_i (\ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i})$$

donc :

$$(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)^{m_1}...(u - \lambda_r \mathrm{Id}_E)^{m_r} = 0$$

et le polynôme $(X - \lambda_1)^{m_1}...(X - \lambda_r)^{m_r}$ annule u donc :

$$m_u(X) \text{ divise } (X - \lambda_1)^{m_1}...(X - \lambda_r)^{m_r}$$

et $k_i \leq m_i$ pour tout i.

D'un autre côté, $m_u(u) = 0 \Rightarrow$

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{k_i} = E \ .$$

Soit $x \in E^{\lambda_i}$. Il existe $x_1 \in \ker(u - \lambda_1)^{k_1}, ..., x_r \in \ker(u - \lambda_r)^{k_r}$ tels que :

$$x = x_1 + ... + x_r$$

$$\Rightarrow x - x_i \in E^{\lambda_i} \cap \left(\oplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \ker(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)^{k_j} \right)$$

$$\subseteq E^{\lambda_i} \cap \left(\oplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} E^{\lambda_j} \right) = \{0\}$$

Donc $x = x_i \in \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{k_i}$. D'où :

$$E^{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i} \subseteq \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{k_i}$$

et donc $k_i \geq m_i$. *q.e.d.*

7.2 Projecteurs spectraux

Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension quelconque. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme P scindé sur $\mathbb{K}$ qui annule u : $P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{a_i}$, pour certains $\lambda_i \in K$ deux à deux distincts et des entiers $a_i \geq 1$.

Proposition 7.6 *(i) Il existe pour tout i un polynôme $Q_i(X) \in K[X]$ tel que $Q_i = 1 \bmod (X - \lambda_i)^{a_i}$ et $Q_i = 0 \bmod (X - \lambda_j)^{a_j}$ pour tous $j \neq i$.*

(ii) On a $E = \oplus_{i=1}^{r} \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{a_i}$. On note π_i les projecteurs associés.

(iii) Pour tout i, $\pi_i = Q_i(u)$.

(iv) Si $\lambda \in K$, on a $E^{\lambda}(u) := \cup_{n \geq 0} \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^n = 0$ si $\lambda \notin \{\lambda_i \ : \ 1 \leq i \leq r\}$ et $\ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{a_i}$ si $\lambda = \lambda_i$.

On dit que les projecteurs π_i s'ils existent sont les *projecteurs spectraux* de u.

Démonstration : On décompose en éléments simples : $1/P = \sum_i U_i/(X - \lambda_i)^{a_i}$ pour certains polynômes U_i. On a alors $1 = \sum_i U_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} (X - \lambda_j)^{a_j}$. Il suffit de poser $Q_i := U_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} (X - \lambda_j)^{a_j}$. Comme $Q_i(X) = 0 \bmod (X - \lambda_j)^{a_j}$, si $x \in \ker(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)^{a_j}$, $Q_i(u)(x) = 0$. De même, comme $Q_i(X) = 1 \bmod (X - \lambda_i)^{a_i}$, on a $Q_i(u)(x) - x = 0$ si $x \in \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{a_i}$. Enfin si $\lambda \notin \{\lambda_i \ : \ 1 \leq i \leq r\}$, si $n \geq 0$, les polynômes $P(X)$ et $(X-\lambda)^n$ sont premiers entre eux donc $\ker(P(u)) = E$ et $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^n$ sont en somme directe d'après le lemme des noyaux donc $\ker(u-\lambda \mathrm{Id}_E)^n = 0$. Si $\lambda = \lambda_i$, si $n \geq a_i$ et $x \in \ker(u-\lambda \mathrm{Id}_E)^n$, alors $x - \pi_i(x) \in \ker(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^n \cap \oplus_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^r \ker(u-\lambda_j \mathrm{Id}_E)^{a_j} = 0$ (d'après le lemme des noyaux). Donc $x = \pi_i(x) \in \ker(u-\lambda_i)^{a_i}$. <u>*q.e.d.*</u>

à retenir : *les projecteurs spectraux sont des polynômes en u.*

7.3 Décomposition de Dunford-Jordan

Un endomorphisme N de E est nilpotent si $N^k = 0$ pour un certain $k \geq 0$.

Théorème 7.7 *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que u est annulé par un polynôme scindé sur K. Alors il existe un unique couple (d, n) tels que :*
0) $d, n \in \mathscr{L}(E)$;
i) d diagonalisable, n nilpotent ;
ii) $dn = nd$;
iii) $u = d + n$.
De plus, d, n sont des polynômes en u.

Cette décomposition
$$u = d + n$$
est appelée décomposition de Dunford-Jordan.

Remarque : Même énoncé avec une matrice A à la place de u.

Démonstration :
soient π_i les projecteurs spectraux de u.
— **existence :** $d := \lambda_1\pi_1 + ... + \lambda_r\pi_r$, $n := u - d$.
Pour tout $x \in E^{\lambda_i}$, $d(x) = \lambda_i x$. Donc
$$E^{\lambda_i} \subseteq \ker(d - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$$
et :
$$E = \oplus_i \ker(d - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$$
et d est diagonalisable avec les mêmes valeurs propres que u.
Pour tout $x \in E^{\lambda_i}$,
$$\begin{aligned} n(x) &= u(x) - d(x) \\ &= (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(x) \end{aligned}$$
et par récurrence :
$$n^k(x) = (u-\lambda_i)^k(x) \ .$$
Donc si $k \geq \max_{1\leq i\leq r}\{k_i\}$, $n^k(x) = 0$.

On a construit d et n comme des polynômes en u ce qui est important pour la suite.

Lemme 7.8 *Soit* $(d_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ *une famille d'endomorphismes de* E *diagonalisables qui commutent deux à deux. Si* E *est de dimension finie alors il existe une base commune de diagonalisation.*

Démonstration : Si tous les d_α sont des homothéties, c'est évident. Sinon on raisonne par récurrence sur $\dim E$ et on choisit un d_{α_0} qui n'est pas une homothétie. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes. Alors pour tout i, $V_i := \ker(d_{\alpha_0} - \lambda_i)$ est un sous-espace de E de dimension $< \dim E$ (car d_{α_0} n'est pas une homothétie) et chaque V_i est stable par d_α pour tout α (car $d_\alpha d_{\alpha_0} = d_{\alpha_0} d_\alpha$). Par hypothèse de récurrence il existe une base $\mathscr{B}_i$ de V_i formée de vecteurs propres communs à tous les d_α. La réunion :

$$\mathscr{B}_1 \cup ... \cup \mathscr{B}_r$$

est alors une base de $V_1 \oplus ... \oplus V_r = E$, une base de diagonalisation pour tous les d_α. *q.e.d.*

— **unicité :** supposons que $u = d' + n'$ avec d' diagonalisable, n' nilpotent et $d'n' = n'd'$. Alors : $d' - d = n - n'$. Or n' commute avec d' et n' donc avec $u = d' + n'$ et avec n qui est un polynôme en u. On en déduit que $n' - n$ est nilpotent (*exo*) .

De même, d' commute avec u donc d' laisse stable chaque $E^{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{k_i}$. Mais alors

$$d'|_{E^{\lambda_i}}$$

est diagonalisable et :

$$(d' - d)|_{E^{\lambda_i}} = (d' - \lambda_i \mathrm{Id}_E)|_{E^{\lambda_i}}$$

est diagonalisable et nilpotent donc nul (nilpotent $\Rightarrow$ la seule valeur propre est 0 et diagonalisable avec pour seule valeur propre 0 $\Rightarrow$ nul). Donc $d' = d$ sur chaque E^{λ_i}, comme $E = \oplus_i E^{\lambda_i}$, par linéarité, $d' = d$. On a aussi : $n' = u - d' = u - d = n$.

q.e.d.

À retenir :

— $d = \lambda_1\pi_1 + ...\lambda_r\pi_r$ et les valeurs propres de u sont les valeurs propres de d.

— diagonalisable + nilpotent $\Rightarrow$ nul.

Exercice 34 *Si* E *est de dimension finie, si* χ_u *est scindé dans* K*, alors on a une décompositionde Dunford-Jordan* $u = d + n$ *et* $\chi_u(X) = \chi_d(X)$*.*

indication : si $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de u, si $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{a_i}$, alors les valeurs propres de d sont les λ_i et comme d est diagonalisable, $\chi_d(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\dim E_{\lambda_i}(d)}$. Or $E_{\lambda_i}(d) = \Im \pi_i = \ker(u - \lambda_i)^{a_i}$ qui est de dimension a_i.

Proposition 7.9 *Soit u un endomorphisme avec une décomposition de Dunford-Jordan : $u = d + n$, d diagonalisable, n nilpotent et $dn = nd$. Alors :*
- *u diagonalisable $\Leftrightarrow u = d \Leftrightarrow n = 0$;*
- *u nilpotent $\Leftrightarrow u = n \Leftrightarrow d = 0$.*

Démonstration : C'est une conséquence directe de la décomposition de Dunford-Jordan. *q.e.d.*

Exemple :
- si $A = \begin{pmatrix} \lambda & & \cdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda \end{pmatrix}$, $D = \lambda I_n$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}$;
- **ATTENTION !** si $u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $d = u$, $n = 0$.

7.4 Calcul pratique des projecteurs spectraux

7.4.1 Méthode

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Supposons que $Q \neq 0$ est un polynôme annulateur de u scindé sur $\mathbb{K}$ (en particulier χ_u est scindé !) (Plus le degré de Q est bas moins compliqués sont les calculs).

1ère étape : Factoriser Q :

$$Q = (X - \lambda_1)^{l_1} ... (X - \lambda_r)^{l_r}$$

λ_i deux à deux $\neq$ et $l_i \geq 1$.

2ème étape : Décomposer $\frac{1}{Q}$ en éléments simples :

$$(*) \quad \frac{1}{Q} = \frac{R_1(X)}{(X - \lambda_1)^{l_1}} + ...$$

où $R_i(X)$: polynômes de degré $< l_i$ (une telle décomposition est unique).

3ème étape : $\pi_{\lambda_i} = R_i(u) Q_i(u)$ où $Q_i(X) := \frac{Q(X)}{(X - \lambda_i)^{l_i}} = \prod_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \neq i}} (X - \lambda_j)^{l_j}$.

justification : la décomposition $(*)$ multipliée par Q donne une relation de Bézout :

$$1 = R_i(X) Q_i(X) + (X - \lambda_i)^{l_i} S(X)$$

pour un certain polynôme $S(X)$.

7.4.2 Exemples

a) cas où u diagonalisable avec seulement 2 valeurs propres :
si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors on sait que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont $0, 3$. Les projecteurs spectraux associés π_0, π_1 vérifient :

$$\pi_0 + \pi_3 = I_3 \text{ et } 3\pi_3 = D = A$$

donc :

$$\pi_3 = \frac{1}{3}A \text{ et } \pi_0 = I_3 - \frac{1}{3}A$$

b)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = m_A(X) = (X-1)(X-2)^2$$

$$\frac{1}{m_A(X)} = \frac{1}{X-1} + \frac{3-X}{(X-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{m_A(X)}{X-1} + \frac{m_A(X)(3-X)}{(X-2)^2}$$

donc :

$$\pi_1 = \left(\frac{m_A(X)}{X-1}\right)(A) = (A-2I_3)^2 \text{ et } \pi_2 = \left(\frac{m_A(X)(3-X)}{(X-2)^2}\right)(A) = -A^2+4A-3I_3.$$

7.5 Formes normales des matrices

7.6 Réduction de Jordan

Nous allons montrer que toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs « presque » diagonaux.

7.6.1 Blocs de Jordan

Définition 23 *Un bloc de Jordan est une matrice de la forme :*

$$J_{\lambda,n} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

où $\lambda \in \mathbb{K}, n \geq 0$.

On a :

$$(J_{\lambda,n} - \lambda I_n)^k = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & k & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ si } 0 \leq k \leq n-1$$

$$\text{et } (J_{\lambda,n} - \lambda I_n)^k = 0 \text{ si } n < k.$$

On a aussi $J_{\lambda,n} - \mu I_n$ inversible si $\mu \neq \lambda$.

Exercice 35 *Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'un bloc de Jordan sont égaux à* $(X - \lambda)^n$.

Définition 24 *Une matrice de Jordan est une matrice diagonale par blocs de la forme :*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_r \end{array}\right)$$

où les J_i *sont des blocs de Jordan.*

Exercice 36 *Une matrice de Jordan est diagonalisable si et seulement si ses blocs sont tous de taille* 1.

7.6.2 Matrices nilpotentes

Supposons que E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E.

Définition 25 *Soit $e \in E$. On appelle hauteur de e, notée $h(e)$, le plus petit entier $m \geq 0$ tel que $u^m(e) = 0$.*

Lemme 7.10 *Si $e \in E$ un vecteur de hauteur m. Alors*

$$e, u(e), ..., u^{m-1}(e)$$

sont linéairement indépendants.

Démonstration : Supposons que

$$\lambda_0 e + ... + \lambda_{m-1} u^{m-1}(e) = 0$$

et que λ_k est le premier coefficient $\neq 0$, $0 \leq k \leq m-1$. Alors si on applique u^{m-k-1}, on trouve :

$$\lambda_k u^{m-1}(e) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_k = 0$$

car $u^{m-1}(e) \neq 0$ *absurdo.* <u>*q.e.d.*</u>

Corollaire 7.10.1 *On a forcément, $u^{\dim E} = 0$ pour tout endomorphisme nilpotent de E.*

Définition 26 *On dit que le sous-espace $\langle e, u(e), ..., u^{m-1}(e)\rangle$ est le sous-espace cyclique de u engendré par e.*

Un sous-espace cyclique est invariant par u (*exo*) et la restriction de de u au sous-espace cyclique :

$$\langle e, u(e), ..., u^{m-1}(e)\rangle$$

a pour matrice

$$J_{0,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

dans la base
$$u^{m-1}(e), ..., u(e), e \ .$$

Remarque : [importante] Soit e un vecteur de hauteur m. Un vecteur x du sous-espace cyclique
$$\langle e, u(e), ..., u^{m-1}(e)\rangle$$

qui n'est pas dans l'image de u est de hauteur m.

En effet, si
$$x = \lambda_0 e + ... + \lambda_{m-1} u^{m-1}(e)$$
avec $\lambda_0 \neq 0$, $u^m(x) = 0$ et $u^{m-1}(x) = \lambda_0 u^{m-1}(e) \neq 0$.

Théorème 7.11 *L'espace E est une* **somme directe** *de sous-espaces cycliques de l'opérateur u :*

$$E = E_1 \oplus ... \oplus E_r \ .$$

En particulier, il existe une base de E où la matrice de u est une matrice de Jordan de la forme :
$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_{0,n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_{0,n_r} \end{array}\right) .$$

Et le nombre r de composantes est $r = \dim \ker u$

Démonstration : Supposons que E est une somme directe de sous-espaces cycliques
$$E_i = \langle e_i, ..., u^{n_i-1}(e_i)\rangle$$
alors, la matrice de u dans la base :

$$u^{n_1-1}(e_1), ..., e_1, u^{n_2-1}(e_2), ..., e_2, ..., u^{n_r-1}(e_r), ..., e_r$$

est de la forme
$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_{0,n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_{0,n_r} \end{array}\right)$$
donc :
$$\mathrm{rang} u = \mathrm{rang} J_{0,n_1} + ... + \mathrm{rang} J_{0,n_r}$$
$$(n_1 - 1) + ... + (n_r - 1) = \dim E - r$$

$$\Leftrightarrow r = \dim E - \mathrm{rang} u = \dim \ker u \ .$$

Démontrons par récurrence sur $n = \dim E \geq 0$ que E est une somme directe de sous-espaces cycliques. Si $n = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons que $n > 0$.

Comme u n'est pas surjective (*exo*) , il existe un sous-espace de E, disons H, de dimension $n-1$ tel que :

$$\mathrm{Im}\, u \subseteq H \ .$$

Ce H est stable par u. Par hypothèse de récurrence,

$$H = H_1 \oplus ... \oplus H_r$$

où les H_i sont des sous-espaces cycliques de $u|_H$ (donc de u). On choisit un vecteur $e \in E \setminus H$.

On a :

$$u(e) = u_1 + ... + u_r \ , ^\forall i, \ u_i \in H_i \ .$$

Si pour un certain i, $u_i = u(v_i)$, avec $v_i \in H_i$, alors on remplace e par $e - v_i \in E \setminus H$. On peut donc supposer que pour tout $i = 1$ à r, $u_i = 0$ ou $u_i \in H_i \setminus u(H_i)$. C'est-à-dire : $u_i = 0$ ou H_i est cyclique engendré par u_i.

On a :

$$h(u(e)) = \max_i h(u_i) (\mathit{exo}) \ .$$

Quitte à renuméroter, on peut supposer que

$$h(u(e)) = h(u_1) =: m \ .$$

Mais alors : $h(e) = m + 1$. Vérifions que

$$E = \langle e, u(e), ..., u^m(e) \rangle \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_r \ .$$

Comme $h(u_1) = \dim H_1 = m$, on a :

$$\dim E = \dim H + 1 = (m+1) + \dim H_2 + ... + \dim H_r$$

et il suffit de démontrer que

$$\langle e, ..., u^m(e) \rangle \cap (H_2 \oplus ... \oplus H_r) = 0 \ .$$

Si $\lambda_0 e + ... + \lambda_m u^m(e) \in H_2 \oplus ... \oplus H_r$, alors, comme $e \notin H$, $\lambda_0 = 0$.

Or, $u(e) = u_1 + ... + u_r$ donc :

$$\lambda_1 u(e) + ... + \lambda_m u^m(e) = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_m u^{m-1}(u_1) \bmod H_2 \oplus ... \oplus H_r$$

$$\Rightarrow \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_m u^{m-1}(u_1) \in H_1 \cap (H_2 \oplus ... \oplus H_r) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_m = 0$$

car $h(u_1) = m$. <u>*q.e.d.*</u>

Exercice 37 *Les 5 matrices suivantes :*

$$0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

sont deux à deux non semblables et toute matrice nilpotente 4×4 *est semblable à l'une d'elles.*

Indication : pour justifier que la 3ème *et la* 4ème *matrice ci-dessus ne sont pas semblables, comparer leur carré.*

7.6.3 Réduction de Jordan

Théorème 7.12 *Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique, $\chi_u(X)$ est* **scindé** *sur $\mathbb{K}$.*

Existence : il existe une base de E où la matrice de u est de Jordan i.e. *:*

$$\mathrm{Mat}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_r \end{array}\right)$$

où les J_i sont des blocs de Jordan.

Version matricielle : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, alors, A est semblable (sur $\mathbb{K}$) à une matrice de Jordan.

Unicité : le nombre de blocs de Jordan de la forme $J_{\lambda,m}$ noté :

$$^\forall \lambda \in \mathbb{K}, ^\forall m \geq 1,\ N_{\lambda,m} := \{1 \leq i \leq r\ :\ J_i = J_{\lambda,m}\}$$

ne dépend que de u (ou de A) :

les λ qui apparaissent sont les valeurs propres de u (ou de A) et plus précisément, on a :

$$N_{\lambda,m} = \mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m+1} - 2\mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m + \mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m-1}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $m \geq 1$.

Remarque : En particulier, ce théorème s'applique à TOUTES les matrices complexes.

Démonstration : Existence : notons $E^{\lambda_1}, ..., E^{\lambda_r}$ les sous-espaces propres généralisés de u. Alors chaque E^{λ_i} est stable par u et E se décompose en :

$$E = E^{\lambda_1} \oplus ... \oplus E^{\lambda_r} \ .$$

De plus , pour tout i,

$$u|_{E^{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{E^{\lambda_i}}$$

est nilpotent. On peut donc appliquer le théorème 7.11 à $u|_{E^{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{E^{\lambda_i}}$ pour tout i. Et on remarque que :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_{0,n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_{0,n_r} \end{array}\right) + \lambda I_{n_1+...+n_r} = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{\lambda,n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_{\lambda,n_r} \end{array}\right) \ .$$

Unicité : remarquons que :

$$\mathrm{rg}\,(J_{\lambda,n} - \mu I_n)^k = \begin{cases} n & \text{si } \mu \neq \lambda \\ n-k & \text{si } \mu = \lambda \text{ et } 0 \leq k \leq n-1 \\ 0 & \text{si } \mu = \lambda \text{ et } n \leq k \end{cases}$$

donc si la matrice de u dans une certaine base est une matrice de Jordan :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_{\lambda_1,n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_{\lambda_r,n_r} \end{array}\right)$$

alors :

$$\mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^k = \sum_{q=1}^{r} \mathrm{rg}\,(J_{\lambda_q,n_q} - \lambda I_{n_q})^k$$

$$= \sum_{\substack{q=1 \\ \lambda_q = \lambda, n_q > k}}^{r} (n_q - k) + \sum_{\substack{q=1 \\ \lambda_q \neq \lambda}}^{r} n_q$$

d'où :

$$\mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1} - \mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^k = \sum_{\substack{q=1 \\ \lambda_q = \lambda, n_q > k-1}}^{r} ((n_q - (k-1)) - (n_q - k))$$

$$= \sum_{\substack{q=1 \\ \lambda_q = \lambda, n_q \geq k}}^{r} 1$$

et finalement :

$$(\mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1} - \mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k}) - (\mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k} - \mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+1}) = \sum_{\substack{q=1 \\ \lambda_q = \lambda, n_q = k}}^{r} 1$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k+1} - 2\mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k} + \mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{k-1} = N_{\lambda,k} \ .$$

<u>*q.e.d.*</u>

Applications

— Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors A est semblable à ${}^tA$. En effet, il suffit de le vérifier lorsque A est un bloc de Jordan (*exo*) .

— Si $N \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors N est semblable à une et une seule des 5 matrices suivantes :

$$0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Il y a une infinité de matrices nilpotentes 4×4 mais il n'y en a que 5 à similitude près.

— Si $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ a pour polynôme caractéristique : $\chi_A(X) = (X - 1)(X - 2)^2$ alors A est semblable

$$\text{à } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou à } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Théorème 7.13 *Soient A et B deux matrices nilpotentes de taille n. Les matrices A et B sont semblables $\Leftrightarrow {}^\forall 1 \leq \nu \leq n/2$, $\mathrm{rg}\,(A^\nu) = \mathrm{rg}\,(B^\nu)$.*

Corollaire 7.13.1 *A et ${}^tA$ sont semblables.*

8 Puissances

8.1 Motivation

— Problème : résoudre

$$\begin{cases} u_n = au_{n-1} + bv_{n-1} \\ v_n = cv_{n-1} + dv_{n-1} \end{cases}$$

où a, b, c, d sont fixés ou bien :

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$$

où a, b sont fixés.

Ces deux problèmes se réduisent au calcul de A^k où :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \quad .$$

8.2 Cas diagonalisable

— cas diagonal : soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors :

$$^\forall k \geq 0, \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad .$$

— cas diagonalisable : si $A = PDP^{-1}$ avec $A, P, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, D diagonale, P inversible, alors :

$$A^k = PD^kP^{-1} \quad .$$

C'est encore plus simple avec les projecteurs spectraux :

$$\text{si } A = \lambda_1\pi_1 + ... + \lambda_r\pi_r$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A et les π_i les projecteurs spectraux associés, alors :

$$^\forall k \geq 0,\ A^k = \lambda_1^k\pi_1 + ... + \lambda_r^k\pi_r$$

c'est vrai aussi pour k entier négatif lorsque tous les λ_i sont non nuls. Exemple : Si

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$$

alors les valeurs propres de A sont 0 et n, et :

$$A = n\pi_n \Rightarrow {}^\forall k,\ A^k = n^k\pi_n = n^{k-1}A\ .$$

Exercice 38 — *Si* $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, *alors :*

$$A = e^{-it}\pi_- + e^{it}\pi_+$$

où :

$$\pi_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \pi_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} .$$

Vérifier alors que :

$$A^k = e^{-ikt}\pi_- + e^{ikt}\pi_+ = \begin{pmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{pmatrix} .$$

— *Si* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *alors :*

$${}^\forall k \in \mathbb{Z}, A^k = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \alpha^{k-1} - \alpha'^{k-1} & \alpha^k - \alpha'^k \\ \alpha^k - \alpha'^k & \alpha^{k+1} - \alpha'^{k+1} \end{pmatrix}$$

où $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\alpha' := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 39 *Soit* $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Soit* ρ *l'unique valeur propre réelle de* A *et* π_ρ *le projecteur spectral associé.*

a) Vérifier que $\pi_\rho = \frac{1}{3\rho^2-1}\begin{pmatrix} \rho^2 & \rho & \rho^3 \\ 1 & \rho^{-1} & \rho \\ \rho & 1 & \rho^2 \end{pmatrix}$.

b) Vérifier que les deux valeurs propres complexes conjuguées de A sont de module < 1 et en déduire que :

$$\rho^2 = \lim_{n\infty} \frac{A^n_{1,3}}{A^n_{1,2}} \ .$$

Exercice 40 *Si* $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, *alors :*

$$\chi_A(X) = m_A(X) = (X-1)(X-2)^2 \ .$$

Vérifier que :

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \pi_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et en déduire que pour tout $n \geq 0$:

$$A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 3n-6 & -6n+12 & -9n+12 \\ 3n-4 & -6n+8 & -9n+6 \\ -n & 2n & 3n+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

8.3 Cas général

Définition 27 *Pour tous entiers n, k, on définit le coefficient binomial par :*

$$\binom{n}{k} := C_n^k := \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

si $k \geq n$ et [$\binom{n}{k} := C_n^k := 0$ si $k > n$.

Les $\binom{n}{k}$ sont des entiers.

Proposition 8.1 *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent. Alors :*

$$^\forall k \geq 0, \ (A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \ .$$

En particulier, si $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente qui commutent :

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j \quad .$$

Proposition 8.2 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que le polynôme minimal de A est scindé :*

$$m_A(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} ... (X - \lambda_r)_r^k$$

les λ_i étant deux à deux distincts. Notons $\pi_1, ..., \pi_r$ les projecteurs spectraux associés aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_r$. Alors :

$$\forall k \geq 0,\ A^k = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{\min\{k, k_i - 1\}} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (A - \lambda_i I_n)^j \right) \pi_i \quad .$$

Démonstration : Il suffit de vérifier cette formule sur chaque sous-espace caractéristique E^{λ_i}. Or si $x \in E^{\lambda_i}$, $Ax = \lambda_i x + (A - \lambda_i I_n)x$ et $(A - \lambda_i)^{k_i} x = 0$.

q.e.d.

8.4 Suites récurrentes

Théorème 8.3 *Soient $a_1, ..., a_p \in \mathbb{C}$. On suppose $a_p \neq 0$.*

On note $P(X) := X^p - a_1 X^{p-1} - ... - a_p$, $\lambda_1, ..., \lambda_r$ ses racines (s.e. distinctes) et $k_1, ..., k_r$ leurs multiplicités respectives.

Alors les suites vérifiant :

$$\forall n \geq p,\ u_n = a_1 u_{n-1} + ... + a_p u_{n-p}$$

sont les suites de la forme :

$$u_n = P_1(n) \lambda_1^n + ... + P_r(n) \lambda_r^n$$

où P_i sont des polynômes de degré $< k_i$.

— rem : P_i peuvent être déterminés par $u_0, ..., u_{p-1}$.

Exemple : Si $p = 1$,

$$\forall n \geq 1,\ u_n = a_1 u_{n-1} \Leftrightarrow \forall n \geq 1,\ u_n = u_0 a_1^n \quad .$$

Si $p = 2$,

$$\forall n \geq 2,\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} \Leftrightarrow \forall n \geq 2,\ u_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$$

pour certains α_1, α_2 si $X^2 - a_1 X - a_2 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} \Leftrightarrow \forall n \geq 2,\ u_n = (\alpha n + \beta)\lambda^n$$

pour certains α, β si $X^2 - a_1 X - a_2 = (X - \lambda)^2$.

Exercice 41 *Soit (u_n) la suite définie par :*

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1, \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

alors :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) .$$

Démonstration : Si $u_n = n^k \lambda_i^n$, avec $0 \leq k < k_i$, alors pour tout $n \geq p$:

$$\begin{aligned} u_n - a_1 u_{n-1} - ... - a_p u_{n-p} &= n^k \lambda_i^n - a_1 (n-1)^k \lambda_i^{n-1} - ... - a_p (n-p)^k \lambda_i^{n-p} \\ &= \lambda_i^{n-p} \left((n-p)^k P(\lambda_i) + (n-p)^{k-1} \lambda_i P'(\lambda_i) + ... + \lambda_i^k P^{(k)}(\lambda_i) \right) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Réciproquement, si :

$$\forall n \geq p,\ u_n = a_1 u_{n-1} + ... + a_p u_{n-p}$$

alors on pose :

$$X_n := \begin{pmatrix} u_{n-p+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p .$$

On a alors :

$$\forall n \geq p,\ X_n = A X_{n-1}$$

où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est la transposée de la matrice compagnon du polynôme $P(X)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_p & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} ... (X - \lambda_r)^{k_r} .$$

Notons $\pi_1, ...\pi_r$ les projecteurs spectraux correspondants. D'après la proposition 8.2,

$$\forall n \geq p,\ A^n = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{\min\{n,k_i-1\}} \binom{n}{j} \lambda_i^{n-j} (A - \lambda_i I_n)^j \right) \pi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \left(\sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{\binom{n}{j}}{\lambda_i^j} (A - \lambda_i I_n)^j \right) \pi_i \ .$$

Or,

$$\forall n \geq p,\ X_n = A^{n-p+1} X_{p-1}$$
$$= A^n X_0$$

si on pose $X_0 := A^{1-p} X_{p-1}$.

Donc, u_n est la dernière composante du vecteur :

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \sum_{j=0}^{k_i-1} \binom{n}{j} \frac{(A - \lambda_i I_n)^j \pi_i(X_0)}{\lambda_i^j}$$

et il suffit de remarquer que si $0 \leq j \leq k_i - 1$,

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)...(n-j+1)}{j!}$$

est un polynôme en n de degré $< k_i$. <u>*q.e.d.*</u>

9 Exponentielle

Dans ce chapitre, les matrices sont complexes !

9.1 Suites de matrices

Définition 28 *On dit qu'une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices complexes converge vers une matrice A si pour tous i, j la suite des coefficients $A_{k,i,j}$ converge vers le coefficient $A_{i,j}$ dans $\mathbb{C}$.*

On pose :

$$|||A||| := \max_i \sum_j |a_{i,j}|$$

pour toute matrice A.

— propriétés : c'est une norme multiplicative ! *c-à-d* : pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

i) $|||A||| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

ii) $|||A + B||| \leq |||A||| + |||B|||$;

iii) $|||\lambda A||| = |\lambda||||A|||$;

iv) $|||AB||| \leq |||A||||||B|||$.

Remarque : Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors pour tous i, j, $|a_{i,j}| \leq |||A|||$. On en déduit qu'une suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice A si :

$$\lim_{k \to \infty} |||A_k - A||| = 0 \ .$$

Exercice 42 *En déduire que si (A_k) et (B_k) sont des suites de matrices qui convergent vers A et B, alors :*

$$\lim_{k \to \infty} A_k B_k = AB \ .$$

Exercice 43 *On pose pour tout* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *:* $||X|| := \max_{i=1}^n |x_i|$.

Alors :

$$|||A||| = \max_{\substack{X \in \mathbb{K}^n \\ X \neq 0}} \frac{||AX||}{||X||}$$

pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

9.2 Définition de $\exp(A)$

Théorème 9.1 *Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la série :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note :

$$\exp A := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

sa limite. C'est la matrice exponentielle de A.

Démonstration : Il suffit de démontrer que les séries de coefficients convergent. Or pour tous i, j, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{A^k_{i,j}}{k!}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{|||A^k|||}{k!}\right|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|||A|||^k}{k!}$$
$$= e^{|||A|||} < \infty \ .$$

Donc pour tous i, j, la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k_{i,j}}{k!}$ converge dans $\mathbb{C}$. <u>*q.e.d.*</u>

Exercice 44 *Pour une matrice diagonale* $D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$*, on a*

$$\exp D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \ .$$

Théorème 9.2 (propriétés de l'exponentielle) *On a :*

$$\exp 0 = I_n \text{ et } \exp(A+B) = \exp A \exp B$$

pour toutes matrices A et B qui commutent. En particulier, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $\exp A$ *est inversible d'inverse* $\exp(-A)$*. On a aussi :*

$$\exp(kA) = (\exp A)^k$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : Attention ! si A, B ne commutent pas, en général $\exp(A+B) \neq \exp A \exp B$.

Démonstration : Montrons que $\exp(A+B) = \exp A \exp B$:

$$^\forall m \geq 0 \ : \left(\sum_{i=0}^{m}\frac{A^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{B^j}{j!}\right) - \sum_{k=0}^{m}\frac{(A+B)^k}{k!}$$

$$= \sum_{0\leq i,j\leq m}\frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!} - \sum_{k=0}^{m}\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=k}}\frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}$$

$$= \sum_{0\le i,j\le m} \frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!} - \sum_{\substack{0\le i,j\le m\\ i+j\le m}} \frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}$$

$$= \sum_{\substack{0\le i,j\le m\\ i+j> m}} \frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}$$

donc :

$$\begin{aligned}
{}^\forall m\ge 0,\ |||\left(\sum_{i=0}^m \frac{A^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^m \frac{B^j}{j!}\right) - \sum_{k=0}^m \frac{(A+B)^k}{k!}|||
&\le ||| \sum_{\substack{0\le i,j\le m\\ i+j> m}} \frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}||| \\
&\le \sum_{\substack{0\le i,j\le m\\ i+j> m}} |||\frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}||| \\
&\le \sum_{\substack{0\le i,j\le m\\ i+j> m}} \frac{|||A|||^i}{i!}\frac{|||B|||^j}{j!} \\
&\le \left(\sum_{i=0}^m \frac{|||A|||^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^m \frac{|||B|||^j}{j!}\right) - \sum_{k=0}^m \frac{(|||A|||+|||B|||)^k}{k!}
\end{aligned}$$

et si « on fait tendre m vers $+\infty$ » on trouve :

$$|||\exp A\exp B - \exp(A+B)||| \le e^{|||A|||}e^{|||B|||} - e^{|||A|||+|||B|||} = 0$$

donc : $\exp A\exp B = \exp(A+B)$. *q.e.d.*

Exercice 45 *Vérifier que :*

$$\exp\left(t.\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

pour tout t réel.

9.3 Méthode de calcul

Exercice 46 *Si $P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), D\in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (par exemple D diagonale), alors :*

$$\exp(PDP^{-1}) = P\exp DP^{-1}\ .$$

En déduire que pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\text{dét}\ \exp A = e^{\mathrm{tr}A}\ .$$

Proposition 9.3 *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. *Soit*

$$m_A(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} ... (X - \lambda_r)^{k_r}$$

le polynôme minimal de A*, les* λ_i *étant les valeurs propres deux à deux distinctes de* A*. Notons* $\pi_1, ... \pi_r$ *les projecteurs spectraux associés aux* λ_i*.*

Alors :

$$\exp(tA) = \sum_{i=1}^{r} e^{t\lambda_i} \left(\sum_{j=0}^{k_i - 1} t^j \frac{(A - \lambda_i I_n)^j}{j!} \right) \pi_i \ .$$

En particulier, $\exp A$ *est un polynôme en* A*.*

Remarque : Si A est diagonalisable, alors, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\exp(tA) = e^{t\lambda_1}\pi_1 + ... + e^{t\lambda_r}\pi_r$.

Démonstration : On décompose A en :

$$A = D + N$$

avec D diagonalisable et N nilpotente qui commutent. Alors :

$$\exp A = \exp D \exp N \ .$$

Or,

$$D = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i \Rightarrow \forall k \geq 0, \ \frac{D^k}{k!} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i^k}{k!} \pi_i$$

et on en déduit que :

$$\exp D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} \right) \pi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} \pi_i \ .$$

D'un autre côté, on a :

$$N = \sum_{i=1}^{r} N \pi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (A - \lambda_i I_n) \pi_i$$

$$\Rightarrow \forall k \geq 0 \ N^k = \sum_{i=1}^{r} (A - \lambda_i I_n)^k \pi_i$$

or : $\forall k \geq k_i$, $(A - \lambda_i I_n)^k \pi_i = 0$ (*exo*) .

Donc :

$$\exp N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{k_i-1} \frac{(A-\lambda_i I_n)^k}{k!}\pi_i \ .$$

q.e.d.

Exemple : Si

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

alors

$$\exp(tA) = e^{2t}(I_3 + t(A - 2I_3))\pi_2 + e^t\pi_1$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} 3t-3 & -6t+6 & -9t+6 \\ 3t-2 & -6t+4 & -9t+3 \\ -t & 2t & 3t+1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Exercice 47 *L'application exponentielle :*

$$\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

est surjective.

Indication : si $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, $D = \sum_i \lambda_i \pi_i$ pour certaines valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{C}^\times$ et les projecteurs spectraux π_i associés. On a $D = \exp D'$ où $D' = \sum_i t_i \pi_i$ avec pour tout i, $t_i \in \mathbb{C}$ tel que $e^{t_i} = \lambda_i$. Si $U = I_n + N$ avec N nilpotente, alors $I_n + N = \exp A$ où $A = \sum_k (-1)^k \frac{N^k}{k+1}$. Cas général : $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow M = D(I_n + N)$ pour une matrice D diagonalisable inversible et N une matrice nilpotente qui sont des polynômes en M.

10 Équations différentielles

10.1 Dérivation des matrices

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dérivable en $t_0 \in I$ si la limite :

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existe dans $\mathbb{C}$. On dit que f est dérivable sur I si elle l'est en tout $t_0 \in I$.

Définition 29 *Soient $a_{i,j} : I \to \mathbb{C}$, i, j, des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la matrice $A(t) := (a_{i,j}(t))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ est dérivable et on note $A'(t) := (a'_{i,j}(t))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$.*

Exercice 48 *Vérifier que si pour tout $t \in I$, $A(t) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $B(t) \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{C})$ et si les matrices A et B sont dérivables sur I, alors le produit aussi et on a :*

$$^\forall t \in I, \; (AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t) \; .$$

Proposition 10.1 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice :*

$$t \mapsto \exp(tA)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$^\forall t \; \in \mathbb{R}, \; (\exp(tA))' = A \exp(tA) = \exp(tA)A \; .$$

Démonstration : Soient $\pi_1, ..., \pi_r$ les projecteurs spectraux de A. Alors d'après la proposition 9.3, on a :

$$\exp(tA) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{\infty} e^{t\lambda_i} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i)^k \pi_i$$

(la somme sur k est en fait finie car $(A - \lambda_i I_n)^k \pi_i = 0$ pour k assez grand). Donc :

$$t \mapsto \exp(tA)$$

et dérivable de dérivée :

$$(\exp(tA))' = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{\infty} e^{t\lambda_i} (\lambda_i \frac{t^k}{k!} + k \frac{t^{k-1}}{k!})(A - \lambda_i I_n)^k \pi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty} e^{t\lambda_i}\lambda_i \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_i I_n)^k \pi_i + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty} e^{t\lambda_i}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda_i I_n)^{k+1}\pi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty} e^{t\lambda_i}\frac{t^k}{k!}(\lambda_i I_n + (A-\lambda_i I_n))(A-\lambda_i I_n)^k \pi_i$$

$$= A\exp(tA) \ .$$

<u>*q.e.d.*</u>

10.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Ce sont les équations de la forme :

$$Y'(t) = AY(t)$$

où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice **constante** et $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ est un vecteur inconnu dont les coordonnées sont des fonctions dérivables.

— cas homogène :

Théorème 10.2

$$Y' = AY \Leftrightarrow Y(t) = \exp(tA)Y(0)$$

en particulier les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Démonstration : D'un côté, le membre de droite est bien solution de l'équation $Y' = AY$ (*exo*) . Réciproquement, si on pose $Z(t) := \exp(-tA)Y(t)$, alors :

$$Z'(t) = \exp(-tA)(Y' - AY) = 0$$

Donc sur $\mathbb{R}$, Z est constante et $Z(t) = Z(0) = Y(0)$ pour tout t. <u>*q.e.d.*</u>

Exemple : Le système :

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) - 3x_3(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t) - 6x_3(t) \\ x_3'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + 5x_3(t) \end{cases}$$

avec pour « conditions initiales » $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0$ a pour solution :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. On trouve alors :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (-3t+3)e^{2t} - 2e^t \,, \\ x_2(t) &= (-3t+2)e^{2t} - e^t \,, \\ x_3(t) &= te^{2t} \quad . \end{aligned}$$

— solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre p à coefficients constants.

Corollaire 10.2.1 *Soient $a_1, ..., a_p \in \mathbb{C}$ tels que $a_p \neq 0$. On suppose que :*

$$\chi(X) := X^p + a_1 X^{p-1} + ... + a_p = (X - \lambda_1)^{m_1} ... (X - \lambda_r)^{m_r}$$

pour certains $\lambda_i \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et certains entiers $m_i \geq 1$.

Alors :

$$(E) \; y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + ... + a_p y = 0 \Leftrightarrow {}^\forall t \in \mathbb{R}, \; y(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t} P_i(t)$$

pour certains polynômes P_i de degré $< m_i$ (pour tout i).

Remarque : On peut déterminer les P_i en fonction des valeurs $y(0), ..., y^{(p-1)}(0)$.

Démonstration : **$\Rightarrow$:** On pose $Y(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^p$ pour tout t.

Alors :

$$(E) \Leftrightarrow Y'(t) = AY(t)$$

où A est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -a_p & \cdots & & & -a_1 \end{pmatrix} .$$

Remarquons que $\chi(X) = \chi_A(X) = m_A(X)$.

On a donc

$$Y(t) = \exp(tA)Y(0)$$

avec :

$$\exp(tA) := \sum_{i=1}^{r} e^{t\lambda_i} \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_i I_p)^k \right) \pi_i$$

où les π_i sont les projecteurs spectraux associés aux λ_i.

Or $y(t)$ est le premier coefficient de $Y(t)$ donc :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t} \underbrace{\sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} \left((A - \lambda_i I_n)^k \pi_i(Y(0)) \right)_1}_{=:P_i(t)} .$$

$\Leftarrow$: Il suffit de vérifier que $y : t \mapsto e^{\lambda_i t} P_i(t)$ est solution de (E) pour tout polynôme de degré $< m_i$. Or pour une telle fonction y, on a (en posant $a_0 := 1$) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y^{(p)}(t) + a_1 y^{(p-1)}(t) + ... + a_p y(t) = \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} e^{\lambda_i t} P_i^{(j)}(t)$$

$$= \sum_{\substack{j=0 \\ j<m_i}}^{p} e^{\lambda_i t} P_i^{(j)}(t) \underbrace{\sum_{k=j}^{p} a_k \frac{k!}{(k-j)!} \lambda_i^{k-j}}_{=\chi^{(j)}(\lambda_i)=0}$$

$$= 0 .$$

<u>*q.e.d.*</u>

11 Invariants de similitude

11.1 Matrices à coefficients polynomiaux

Lemme 11.1 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$. La matrice A est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ si et seulement si* $\text{dét}\, A$ *est une constante non nulle. Autrement dit :*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}[X]) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X]) \ : \ \text{dét}\, A \in \mathbb{K}^*\} \ .$$

Démonstration : Si $AB = I_n$ pour une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$, alors :

$$\text{dét}\, A \text{dét}\, B = 1$$

donc $\text{dét}\, A$ est un polynôme inversible. Donc $\text{dét}\, A \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Réciproquement, si $\text{dét}\, A \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, A} {}^t\widetilde{(A)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X]) \ .$$

<u>*q.e.d.*</u>

Définition 30 *On notera pour toute matrice non nulle $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$*

$$d_1(A) := \text{ le pgcd unitaire des coefficients de } A$$

c'est le polynôme unitaire de degré maximal qui divise tous les coefficients de A.

Proposition 11.2 *Si $P, Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ sont des matrices inversibles (c-à-d dont le déterminant est une constante non nulle), alors $d_1(PAQ) = d_1(A)$.*

Démonstration : Notons $c_{i,j}$ les coefficients de PAQ. Alors :

$$\forall i, j \, , \, c_{i,j} = \sum_{k,l=1}^{n} P_{i,k} A_{k,l} Q_{l,j}$$

donc $d_1(A)$ divise $c_{i,j}$ pour tous i, j. Donc $d_1(A)$ divise $d_1(PAQ)$. De même $d_1(PAQ)$ divise $d_1(A) = d_1(P^{-1}(PAQ)Q^{-1})$. Ainsi, $d_1(A) = d_1(PAQ)$. <u>*q.e.d.*</u>

11.2 Matrices élémentaires

Ce sont les matrices de l'une des formes suivantes :

$T_{i,j}(\lambda)$ « la matrice I_n à laquelle on a ajouté un polynôme $\lambda \in \mathbb{K}[X]$ en position i, j »

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \lambda(X) & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

— Σ_i « la matrice obtenue à partir de I_n en permutant les colonnes i et $i+1$ » :

$$\Sigma_i := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \overset{i-1 \text{ fois}}{\ddots} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \overset{i-1 \text{ fois}}{\ddots} \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

— $D_i(\alpha)$ « la matrice obtenue à partir de I_n en remplaçant le $i$ème coefficient diagonal par $\alpha \in \mathbb{K}^*$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Ces matrices sont toutes inversibles dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$.

11.3 Réduction des matrices à coefficients polynomiaux

Définition 31 *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$. On dira que A est équivalente à B, notation : $A \sim B$ s'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}[X])$ telles que : $A = PBQ$.*

Exercice 49 *C'est une relation d'équivalence* i.e. *:*

$$^{\forall}A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X]),\ A \sim A\ ;$$

$$A \sim B \Rightarrow B \sim A\ ;$$

$$A \sim B \sim C \Rightarrow A \sim C\ .$$

Lemme 11.3 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ une matrice non nulle. Alors, A est équivalente à une matrice de la forme :*

$$\begin{pmatrix} d_1(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{A'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

pour une certaine matrice $A' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K}[X])$.

Démonstration : On utilise la multiplication à gauche et à droite par des matrices élémentaires. Dans le tableau suivant, on rappelle l'effet de la multiplication d'une matrice A par les matrices élémentaires :

Matrices élémentaires E	effet de la multiplication à gauche EA	effet de la multiplication à droite AE
$T_{i,j}(\lambda)$	« ajoute $\lambda\times$ la ligne i à la ligne j »	« ajoute $\lambda\times$ la colonne i à la colonne j »
$D_i(\alpha)$	« multiplie la ligne i par α »	« multiplie la colonne i par α »
Σ_i	« échange les lignes i et $i+1$ »	« échange les colonnes i et $i+1$ »

Soit d le degré minimal d'un coefficient non nul $b_{i,j}$ d'une matrice B équivalente à A. Quitte à permuter des lignes ou des colonnes de B, on peut supposer que $b_{1,1}$ est de degré d. Soit $2 \leq j \leq n$, la division euclidienne de $b_{1,j}$ par $b_{1,1}$ donne :

$$b_{1,j} = qb_{1,1} + r_{1,j}$$

où $\deg r_{1,j} < \deg b_{1,1}$. Donc en retranchant $q\times$ la colonne 1 à la colonne j de B on obtient une matrice équivalente à B donc à A dont la première ligne est de la forme :

$$b_{1,1} ... r_{1,j} ...$$

Si $r_{1,j} \neq 0$, on a contredit la minimalité de d. Donc $r_{1,j} = 0$ et $b_{1,1}$ divise $b_{1,j}$. En raisonnant comme cela avec tous les colonnes $2 \leq j \leq n$ et de même avec toutes les lignes $2 \leq i \leq n$, on s'aperçoit que l'on peut supposer que les coefficients $b_{1,j}$ et $b_{i,1}$ sont nuls si $2 \leq i, j \leq n$. Soit $b_{i,j}$ un coefficient de B avec $i, j \geq 2$. En ajoutant la ligne i à la ligne 1, on trouve une matrice équivalente à A dont la première ligne comprend les termes :

$$b_{1,1} ... b_{i,j} ...$$

On a alors vu que $b_{1,1}$ divise $b_{i,j}$.

On a donc montré que A est équivalente à une matrice B de la forme :

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{A'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $b_{1,1}$ divise tous les coefficients de la matrice A' et où l'on peut supposer que $b_{1,1}$ est unitaire (quitte à multiplier la ligne 1 par un coefficient constant non nul) . Mais alors $d_1(B) = b_{1,1}$. Et comme A est équivalente à B, $d_1(A) = b_{1,1}$.

<u>*q.e.d.*</u>

Exemple :

$$\begin{pmatrix} X & -1 \\ 0 & X \end{pmatrix} \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & X \\ X & 0 \end{pmatrix} \overset{-C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & X \\ -X & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + XL_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & X^2 \end{pmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2 - XC_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^2 \end{pmatrix} .$$

Théorème 11.4 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$. Alors, il existe $r \geq 0$ et une suite $P_1, ..., P_r$ de polynômes unitaires dans $\mathbb{K}[X]$ tels que :*

$$i) \;\; P_1 | P_2 | ... | P_r$$

$$ii) \;\; A \sim \begin{pmatrix} P_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & P_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(« | » signifie divise). De plus, si $s \geq 0$ et une suite $Q_1, ..., Q_s$ de polynômes unitaires vérifient aussi i)etii), alors : $s = r$ et $Q_i = P_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Démonstration : Pour l'existence des $P_1, ..., P_r$, il suffit de raisonner par récurrence sur n, la taille de la matrice A, et d'utiliser le lemme 11.3.

Pour l'unicité, on note $\Delta_i(A)$ le pgcd des mineurs non nuls de taille i de A si $i \leq r$ le rang de A. Si $P, Q \in M_n(K[X])$, alors un mineur de taille i de PAQ est divisible par $\Delta_i(A)$ car les colonnes de PAQ sont des combinaisons $K[X]-$linéaires des colonnes de PA et les lignes de PA sont des combinaisons $K[X]-$linéaires des lignes de A. En particulier, si P, Q sont inversibles, $\Delta_i(PAQ) = \Delta_i(A)$. Il est ensuite facile de voir que si $i \leq r$, alors

$$\Delta_i \left(\begin{pmatrix} P_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & P_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \right) = P_1 ... P_i$$

...exoo *q.e.d.*

Remarque : Si dét $A \neq 0$, alors $r = n$ et dét $A = P_1 ... P_n$.

Définition 32 *Les P_i différents de 1 sont appelés les diviseurs élémentaires de A. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les diviseurs élémentaires de $XI_n - A$ sont appelés les invariants de similitude de A.*

Exercice 50 *Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors A et B ont les mêmes invariants de similitude. Pour la réciproque, cf. la section suivante.*

Exercice 51 *Si* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ *est de rang* r *(le rang de* A *vue comme matrice dans* $\mathscr{M}_n(K(X))$*), posons pour tout* $i \leq r$, $\Delta_i(A)$ *le pgcd unitaire des mineurs non nuls de taille* $i \leq r$ *de* A*. Alors la matrice* A *a pour invariants de similitude les polynômes* $Q_1, ..., Q_r$ *où* $Q_1 = \Delta_1, ..., Q_r = \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}$.

11.4 Invariants de similitude des matrices compagnons

Quels sont les invariants de similitude d'une matrice compagnon ?

Lemme 11.5 *Soient* $P(X) := X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_n \in \mathbb{K}[X]$ *et*

$$C_P := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -c_n \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 \cdots 0 & & 1 & -c_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

la matrice compagnon associée. Alors la matrice C_P *a un seul invariant de similitude : le polynôme* $P(X)$*.*

Démonstration :

$$XI_n - C_P := \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + ... + X^{n-1}L_n}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_n}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X & a_2 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & X+a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & P(X) \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & P(X) \end{pmatrix}$$

q.e.d.

Lemme 11.6 *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. alors :*

$$XI_n - A \sim XI_n - B \Leftrightarrow A \text{ est semblable à } B.$$

Démonstration : Démontrons le sens difficile : $\Rightarrow$: on suppose qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}[X])$ telles que :

$$XI_n - A = P(XI_n - B)Q\ .$$

Il existe deux matrices $P_0 \in \mathscr{M}_n(K)$, $P_1 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ telles que $P = (XI_n - A)P_1 + P_0$.

En effet, comme $XI_n - A$ et A commutent, on a pour tout $k \geq 1$:

$$X^k I_n = ((XI_n - A) + A)^k = (XI_n - A)R_k + A^k$$

pour une certaine matrice $R_k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ † . Or, $P = X^m C_m + ... + C_0$ pour certaines matrices $C_0, ..., C_m \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (on a simplement décomposé les coefficients en somme de monômes et regroupé les monômes par degrés). Donc :

$$P = (XI_n - A)\underbrace{(R_m + ... + R_1)}_{=:P_1} + \underbrace{(A^m C_m + ... + C_0)}_{=:P_0}\ .$$

†. il suffit de prendre $R_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j}(XI_n - A)^{k-j-1}A^j$.

De même, il existe $Q_0 \in \mathscr{M}_n(K)$, $Q_1 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ telles que $Q = Q_1(XI_n - A) + Q_0$.

Mais alors :

$$XI_n - A = ((XI_n - A)P_1 + P_0)(XI_n - B)(Q_1(XI_n - A) + Q_0)$$

$$= P_0(XI_n - B)Q_0 + (XI_n - A)P_1(XI_n - B)Q_1(XI_n - A)$$
$$+P_0(XI_n - B)Q_1(XI_n - A) + (XI_n - A)P_1(XI_n - B)Q_0 \ .$$

Or :

$$P_0(XI_n - B)Q_1(XI_n - A) = (P - (XI_n - A)P_1)(XI_n - B)Q_1(XI_n - A)$$

$$= (XI_n - A)\left(Q^{-1}Q_1 - P_1(XI_n - B)Q_1 \right)(XI_n - A)$$

car $P(XI_n - B) = (XI_n - A)Q^{-1}$.

De même :

$$(XI_n - A)P_1(XI_n - B)Q_0 = (XI_n - A)\left(P_1P^{-1} - P_1(XI_n - B)Q_1 \right)(XI_n - A).$$

On a donc montré que :

$$XI_n - A = P_0(XI_n - B)Q_0 + (XI_n - A)S(XI_n - A)$$

où :

$$S := Q^{-1}Q_1 - P_1(XI_n - B)Q_1 + P_1P^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X]) \ .$$

Finalement, on a obtenu :

$$XI_n - A - P_0(XI_n - B)Q_0 = (XI_n - A)S(XI_n - A) \ .$$

Si $S \neq 0$, le terme de droite est de degré au moins 2 alors que le terme de gauche est toujours de degré ≤ 1 : *contradiction !*

Donc $S = 0$ et :

$$XI_n - A = P_0(XI_n - B)Q_0$$

avec $P_0, Q_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Enfin, on conclut :

$$XI_n - A = P_0(XI_n - B)Q_0 \Leftrightarrow XI_n - A = XP_0Q_0 - P_0BQ_0$$

$$\Leftrightarrow P_0Q_0 = I_n \text{ et } A = P_0BQ_0$$
$$\Rightarrow P_0 \text{ inversible et } A = P_0BP_0^{-1} \ .$$

q.e.d.

Voici le théorème principal du chapitre (et même du cours) :

Théorème 11.7 *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Il existe* $1 \leq r \leq n$ *et* $P_1, ..., P_r \in \mathbb{K}[X]$ *des polynômes unitaires tels que :*

$$i) \ \ P_1 | ... | P_r \ ;$$

$$ii) \ \ XI_n - A \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & P_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & P_r \end{pmatrix} .$$

De plus, A est semblable à la matrice diagonale par blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right)$$

où les C_{P_i} sont les matrices compagnons associées aux polynômes P_i. En particulier :

$$\chi_A(X) = P_1 ... P_r \text{ et } P_r \textit{ est le polynôme minimal de } A.$$

Corollaire 11.7.1 *Si* $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *ont les mêmes invariants de similitude alors A et B sont semblables.*

Démonstration : A et B sont semblables à la même matrice diagonale par blocs « compagnons » d'après le théorème. *q.e.d.*

Démonstration du théorème principal : Soient $P_1, ..., P_r$ les invariants de similitude de A. Alors $i)$ et $ii)$ sont vérifiées.En particulier :

$$XI_n - A = P \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & P_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & P_r \end{pmatrix} Q$$

pour certaines matrices $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}[X])$. En prenant le déterminant, on trouve :

$$\chi_A(X) = \det P (P_1 ... P_r) \det Q$$

$$\Rightarrow \chi_A(X) = c P_1 ... P_r$$

où $c := \det P \det Q \in \mathbb{K}^*$. Comme $\chi_A(X)$ et $P_1...P_r$ sont unitaires, $c = 1$.

En particulier, $\deg \chi_A(X) = n = \deg P_1 + ... + \deg P_r$. Donc dans la matrice $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & P_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & P_r \end{pmatrix}$, le nombre de « 1 » sur la diagonal est :

$$n - r = (\deg P_1 - 1) + ... + (\deg P_r - 1) \ .$$

On en déduit que :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

et que :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & P_1 \end{pmatrix} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & P_r \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & P_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & P_r \end{pmatrix} \sim XI_n - A \ .$$

On applique alors le lemme 11.6 aux matrices A et $\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right)$.

Il reste à montrer que P_r est le polynôme minimal de A. Il suffit de vérifier que P_r est le polynôme minimal de $\mathscr{C} := \left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right)$. Or, un polynôme $p(X)$ annule $\mathscr{C}$ si et seulement si $p(C_{P_1}) = ... = p(C_{P_r}) = 0$ *i.e.* $P_i|p(X)$ pour tout i (car C_{P_i} a pour polynôme minimal P_i). Donc :

$$p(\mathscr{C}) = 0 \Leftrightarrow P_r|p(X) \ .$$

Ainsi, $\mathscr{C}$, et donc A, ont pour polynôme minimal P_r. *q.e.d.*

11.5 Endomorphismes cycliques

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.

Soit u un endomorphisme de E.

Les facteurs invariants $P_1, ..., P_r$ de la matrice de u dans une base de E ne dépendent pas de la base choisie ; on les appellera les facteurs invariants de u.

Pour tout x de E, on note :

$$E_x := \langle x, u(x), ..., u^k(x), ...\rangle \ .$$

Remarque : $E_x = \{P(u)(x) \ : \ P(X) \in \mathbb{K}[X]\}$.

Le sous-espace E_x est stable par u. De plus si $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u (par exemple le polynôme minimal de u), alors E_x est engendré par les vecteurs $x, ..., u^{d-1}(x)$ où d est le degré de $P(X)$ (*exo*) .

Définition 33 *On dit que u est un endomorphisme cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$.*

Proposition 11.8 *Soit u un endomorphisme de E de polynôme minimal $m_u(X)$.*

*L'endomorphisme u est cyclique si et seulement si $\deg m_u = \dim E$ (*i.e. *$m_u(X) = \chi_u(X)$ le polynôme caractéristique de u.*

Démonstration : Soit $d := \deg m_u(X)$. Soit $n := \dim E$. Si $E_x = E$, alors il existe $k \leq d$ tel que $x, ..., u^{k-1}(x)$ forment une base de E_x. On a donc :

$$k = \dim E_x = \dim E = n \leq d$$

Donc $\deg \chi_u(X) \leq \deg m_u(X)$. Or, $m_u(X)$ divise $\chi_u(X)$ et les deux sont unitaires donc : $\chi_u = m_u$.

Pour la réciproque on utilise les facteurs invariants $P_1, ..., P_r$ de u. On a $P_1|...|P_r$, $P_1...P_r = \chi_u(X)$ et $P_r = m_u(X)$. Si $m_u(X) = \chi_u(X)$, alors $r = 1$ et il existe une base $e_1, ..., e_n$ de E où la matrice de u est une matrice compagnon : C_{P_1}.

On a alors :

$$u(e_i) = e_{i+1}$$

si $1 \leq i \leq n$. Donc :

$$E = \langle e_1, ..., e_n \rangle = \langle e_1, ..., u^{n-1}(e_1) \rangle$$

$$= E_{e_1}$$

et u est cyclique.

q.e.d.

Remarque : si u est cyclique et si $E = E_x$, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P(u)(x) = 0 \Leftrightarrow P(u) = 0 \Leftrightarrow m_u(X)|P(X) \ .$$

En effet, si $P(u)(x) = 0$, alors $P(u)(u^k(x)) = u^k(P(u)(x)) = 0$ pour tout k, donc $P(u)$ est nul sur $E_x = E$.

En particulier, si $E_x = E$, alors : $x, u(x), ..., u^{n-1}(x)$ est une base de E.

Voici une version du théorème 11.7 pour les endomorphismes :

Théorème 11.9 *Si u est un endomorphisme de E, alors il existe une suite de sous-espaces stables de E : $E_1, ..., E_r$ tels que :*

i) $E = E_1 \oplus ... \oplus E_r$;

ii) pour tout $1 \leq i \leq r$, la restriction $u_i := u|_{E_i}$ est un endomorphisme cyclique ;

iii) si pour tout i, P_i est le polynôme minimal de u_i, alors $P_1|...|P_r$.

De plus la suite $P_1, ..., P_r$ ne dépend pas de la décomposition choisie. Ce soont les facteurs invariants de u.

Remarque : il existe une base $e_1, ..., e_n$ de E où la matrice de u est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right)$$

c'est la réduction de Frobenius.

Théorème 11.10 (Frobenius) *Soit u un endomorphisme de E. Notons $P_1, ..., P_r$ ses facteurs invariants. On note :*

$$\mathscr{C}(u) := \{v \in \mathscr{L}(E) \ : \ uv = vu\}$$

l'espace des endomorphismes qui commutent à u. Alors :

$$\dim \mathscr{C}(u) = (2r-1)d_1 + (2r-3)d_2 + ... + d_r$$

où $d_i := \deg P_i$ pour tout i.

Démonstration : Soit $E = E_1 \oplus ... \oplus E_r$ une décomposition comme dans le théorème 11.9. On n ote $u_i := u|_{E_i}$. Pour tout $x \in E$ on pose $f_j(x$ la composante de $f(x)$ dans E_j :

$$f(x) = f_1(x) + ... + f_r(x)$$

avec $f_1j(x) \in E_j$ pour tout j. Alors $f_j : E \to E_j$, $x \mapsto f_j(x)$ est linéaire. Pour tous $1 \leq i, j \leq r$, on pose :

$$f_{i,j} := f_j|_{E_i} : E_i \to E_j \ .$$

L'application :

$$\mathscr{L}(E) \to \oplus_{1 \leq i,j \leq r} \mathscr{L}(E_i, E_j)$$

est un isomorphisme (*exo*) .

Pour tous $1 \leq i,j \leq r$, on pose

$$\mathscr{C}_{i,j} := \{F \in \mathscr{L}(E_i, E_j) \ : \ u_j F = F u_i\} \ .$$

On a :

$$f \in \mathscr{C}(u) \Leftrightarrow fu = uf \Leftrightarrow {}^{\forall}1 \leq i \leq r,\ {}^{\forall}x \in E_i,\ fu(x)uf(x)$$

$${}^{\forall}1 \leq i \leq r,\ {}^{\forall}x \in E_i,\ f_1u(x) + ... + f_ru(x) = uf_1(x) + ... + uf_r(x)$$

$$\Leftrightarrow {}^{\forall}1 \leq i \leq r,\ {}^{\forall}x \in E_i,\ {}^{\forall}1 \leq j \leq r,\ f_ju(x) = uf_j(x)$$

$${}^{\forall}1 \leq i,j \leq r,\ f_ju_i = u_jf_j|_{E_i}$$

$${}^{\forall}1 \leq i,j \leq r,\ f_{i,j}u_i = u_jf_{i,j} \ .$$

Donc $\mathscr{C}(u) \simeq \oplus_{1\leq i,j\leq r}\mathscr{C}_{i,j}$ et :

$$\dim \mathscr{C}(u) = \sum_{1\leq i,j\leq r} \dim \mathscr{C}_{i,j} \ .$$

Calculons $\dim \mathscr{C}_{i,j}$: soit $x \in E_i$ tel que :

$$E_i = \langle x, ..., u_i^{d_i-1}(x)\rangle = \langle x, ..., u^{d_i-1}(x)\rangle$$

(en particulier, $x, ..., u^{d_i-1}(x)$ est une base de E_i).

Soit $\Phi : \mathscr{C}_{i,j} \to E_j$, $F \mapsto F(x)$.

Alors Φ est injective :

en effet, si $F \in \mathscr{C}_{i,j}$ et si $\Phi(F) = 0$, alors $F(x) = 0$ et pour tout $k \geq 0$, on a :

$$Fu_i^k(x) = u_j^kF(x) = 0$$

donc F est nul sur E_i *i.e.* $F = 0$.

On a $\operatorname{Im}\Phi = \ker P_i(u_j) \subseteq E_j$.

En effet, si $F \in \mathscr{C}_{i,j}$, alors :

$$P_i(u_j)(F(x)) = (P_i(u_j)F)(x)$$

$$= (FP_i(u_i))(x)$$

$$= 0 \ .$$

Donc $F(x) \in \ker P_i(u_j)$ pour tout $F \in \mathscr{C}_{i,j}$. ainsi : $\operatorname{Im}\Phi \subseteq \ker P_i(u_j)$.

Pour l'inclusion réciproque, soit $y \in \ker P_i(u_j)$. On pose alors :

$$F(Q(u_i)(x)) := Q(u_j)(y)$$

pour tout polynôme Q. L'application $F : E_i \to E_j$ est bien définie en effet : si $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ sont des polynômes tels que $Q_1(u_i)(x) = Q_2(u_i)(x)$, alors

$$(Q_1 - Q_2)(u_i)(x) = 0 \Rightarrow P_i | Q_1 - Q_2$$

(car P_i est le polynôme minimal de u_i)

$$\Rightarrow (Q_1 - Q_2)(u_j)(y) = 0$$

(car $y \in \ker(P_i(u_j))$)

$$\Rightarrow Q_1(u_j)(y) = Q_2(u_j)(y) \ .$$

L'application est linéaire et on a : $Fu_i(x) = u_j(y)$ et $F(x) = y$ donc :

$$Fu_i(x) = u_j F(x)$$

$$\Rightarrow Fu_i = u_j F$$

sur E_i.

Ainsi, $F \in \mathscr{C}_{i,j}$ et $\Phi(F) = F(x) = y$.

On a donc $\dim \mathscr{C}_{i,j} = \dim \ker P_i(u_j)$.

Nous allons montrer que :

$$\dim \ker P_i(u_j) = \begin{cases} d_i \text{ si } i \leq j \\ d_j \text{ si } i \geq j \end{cases} \ .$$

Si $i \geq j$, alors $P_j | P_i$ donc $P_i(u_j) = 0$ et $\ker P_i(u_j) = \ker 0 = E_j$. Donc $\dim \ker P_i(u_j) = \dim E_j = d_j$.

Si $i \leq j$, alors $P_i | P_j$. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_i Q = P_j$.

Soit $S \in \mathbb{K}[X]$. On a : $S(u_j)(x) \in E_j$ et :

$$S(u_j)(x) \in \ker P_i(u_j) \Leftrightarrow P_i(u_j) S(u_j)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow P_j | P_i S$$

$$\Leftrightarrow P_i Q | P_i S$$

$$\Leftrightarrow Q | S \ .$$

Donc :

$$\ker P_i(u_j) = \{S(u_j)(x) \ : \ Q|S\}$$

$$= \{(QS_1)(u_j)(x) \ : \ S_1 \in \mathbb{K}[X]\}$$

$$= \left\langle Q(u_j)(u_j^k(x)) \ : \ k \geq 0 \right\rangle$$

$$= \left\langle Q(u_j)(u_j^k(x)) \ : \ 0 \leq k \leq d_i - 1 \right\rangle$$

(*exo*) .

Or les vecteurs $Q(u_j)(u_j^k(x)) \ : \ 0 \leq k \leq d_i - 1$ sont indépendants donc $\dim \ker P_i(u_j) = d_i$.

En conclusion, on a :

$$\dim \mathscr{C}(u) = \sum_{1 \leq i,j \leq r} \dim \mathscr{C}_{i,j}$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq r} d_i + \sum_{1 \leq j < i \leq r} d_j + \sum_{1 \leq i \leq r} d_i$$

$$= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} d_i + \sum_{1 \leq i \leq r} d_i$$

$$= 2 \sum_{1 \leq i \leq r} (r - i) d_i + \sum_{1 \leq i \leq r} d_i$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq r} (2r - 2i + 1) d_i \ .$$

<u>*q.e.d.*</u>

Remarques :

— si $u = \lambda \mathrm{Id}_E$, alors $r = n$ et les facteurs invariants de u sont $P_1 = ... = P_r = (X - \lambda)$ et on retrouve que :

$$\dim \mathscr{C}(u) = \sum_{1 \leq i \leq r} (2n - 2i - 1)$$

$$= 2n - 1 + 2n - 3 + ... + 1$$

$$= n^2 = \dim \mathscr{L}(E) \ .$$

D'où $\mathscr{C}(u) = \mathscr{L}(E)$.

— si u est cyclique, alors : $r = 1$ et $P_1 = \chi_u(X)$ donc :

$$\dim \mathscr{C}(u) = n \ .$$

On en déduit dans ce cas que :

$$\mathscr{C}(u) = \mathbb{K}[u]$$

$$= \{P(u) \ : \ P \in \mathbb{K}[X]\}$$

$$= \langle \mathrm{Id}_E, u, ..., u^{n-1} \rangle \ .$$

11.6 Invariants de similitude

Théorème 11.11 *Soit A une matrice $n \times n$. Alors A diagonalisable $\Leftrightarrow$ tous les invariants de similitude de A sont linéaires.*

Théorème 11.12 $A \sim B \Leftrightarrow XI_n - A$ *et* $XI_n - B$ *sont équivalentes.*

Table des matières