3a) Soit $M \in M_p(K[x])$ une matrice $p \times p$ à coefficients dans l'anneau $K[x]$. Si M est inversible dans $M_p(K[x])$, alors $\operatorname{dét} M$ est inversible dans $K[x]$ donc $\operatorname{dét} M \in K \setminus \{0\}$. Réciproquement, si $\operatorname{dét} M \in K \setminus \{0\}$, alors la matrice $M' := \frac{1}{\operatorname{dét} M} {}^t\mathrm{Com}(M)$ est aussi à coefficients dans $K[x]$ et on a $M'M = MM' = I_p$ donc $M \in \mathrm{GL}_p(K[x])$.

3b) En développant par rapport à la dernière colonne, on trouve :

$$\chi_{C_r}(x) = \begin{vmatrix} x & \cdots & \cdots & r_p \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & x & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\, 0 & -1 & x + r_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+r_1)x^{p-1} + \sum_{k=2}^{p} (-1)^{k-1} r_k \underbrace{\begin{vmatrix} x & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & -1 & x & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -1 \end{vmatrix}}_{p-k \text{ « } x \text{ »sur la diagonale}}$$

$$= x^p + r_1 x^{p-1} + \sum_{k=2}^{p} r_k x^{p-k} = r(x) \ .$$

Si $0 \leq i \leq p-1$, alors la première colonne de la matrice C_r^i est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(où 1 est en $i$ème position) ; donc les matrices C_r^i, $1 \leq i \leq p-1$ sont $K-$linéairement indépendantes et $m_{C_r}(x)$ est de degré p. D'où $m_{C_r}(x) = r(x)$.

3c) En faisant dans cet ordre les opérations élémentaires suivantes sur les colonnes de $xI_p - C_r$: $C_2 \leftarrow C_2 + xC_1$, ...,$C_p \leftarrow C_{p-1} + xC_{C_{p-2}}$ (ce qui revient à multiplier à droite par des matrices inversibles (de déterminant 1), on trouve que $xI_p - C_r \sim \begin{pmatrix} x & x^2 & \cdots & x^{p-1} & r_p \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & r_{p-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & -1 & x + r_1 \end{pmatrix}$.

Puis

$$xI_p - C_r \sim \begin{pmatrix} x & x^2 & \cdots & x^{p-1} & r(x) \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si on fait l'opération $C_p \leftarrow C_p + xC_1 + ... + (x + r_1)C_{p-1}$. En permutant les lignes on trouve :

$$XI_p - C_r \sim \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ x & \cdots & x^{p-1} & r(x) \end{pmatrix}$$

et enfin $XI_p - C_r \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & r(x) \end{pmatrix}$ grâce à des opérations élémentaires évidentes sur les lignes.

3d) $\chi_M(x) = cP_1...P_r$ où c est une constante non nulle car une matrice inversible dans $M_p(K[x])$ a son déterminant dans $K^\times$. Comme $\chi_M(x)$ et les P_i sont unitaires, on a $c = 1$.

Remarque : l'unicité des P_i vient du fait qu'une matrice M dans $M_p(K[x])$ est équivalente à une matrice diagonale $\mathrm{diag}(Q_1, ..., Q_p)$ *où $Q_1|Q_1|...|Q_n$ (éventuellement certains Q_i sont nuls) avec pour tout i, $Q_i =$ le pgcd des mineurs de taille i de la matrice M.*

3e) Pour l'équivalence $xI_p - M_1 \sim xI_p - M_2 \Leftrightarrow M_1$ semblable à M_2, cf le cours en ligne (lemme 11.6). Pour montrer que A est semblable à la matrice diagonale par blocs :

$$C := \left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right)$$

il suffit de montrer que $XI_p - A \sim XI_p - C$. Or $XI_p - A \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & P_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & P_r \end{pmatrix}$

où le nombre de 1 est $\deg P_1 - 1 + ... + \deg P_r - 1$. Donc $XI_p - A$ est équivalente à la matrice diagonale par blocs $\left(\begin{array}{c|c|c} D_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & D_r \end{array}\right)$ où les D_i sont les matrices diagonales $\mathrm{diag}(1,...,1,P_i)$ de taille $\deg P_i$. Comme pour tout i, $XI_{\deg P_i} - C_{P_i} \sim D_i$, on a bien $XI_p - A \sim C$.

3f) Si $Q \in K[x]$, alors $Q(A)$ est semblable à la matrice diagonale par blocs $\left(\begin{array}{c|c|c} Q(C_{P_1}) & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & Q(C_{P_r}) \end{array}\right)$. Donc :

$$\begin{aligned} Q(A) = 0 &\Leftrightarrow {}^{\forall} i,\ Q(C_{P_i}) = 0 \\ &\Leftrightarrow {}^{\forall} i, P_i | Q \\ &\Leftrightarrow P_r | Q \ . \end{aligned}$$

Donc $m_A = P_r$.

3g) Notons $P_1, .., P_r \in K[x]$ les invariants de similitude de A et $P'_1, ..., P'_s \in K[x]$ ceux de A'. Les P_i et les P'_i sont aussi les invariants de similitude de A et A' vues comme matrices dans $M_p(\mathbb{C}[x])$ ($\supseteq M_p(K[x])$). Comme A et A' sont semblables sur $\mathbb{C}$, on a $r = s$ et pour tout i, $P_i = P'_i$ donc A et A' sont semblables sur K.