

Feuille n° 2  
jeudi 16 janvier 2020  
Groupes abéliens de type fini

**Exercice 1 groupes abéliens de type fini**

- a) Soit  $M$  un groupe abélien engendré par  $m$  éléments. Montrer (par récurrence sur  $m$ ) que tout sous-groupe  $N \leq M$  peut être engendré par  $n \leq m$  éléments. *Indication : si  $M = \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_m$ , appliquer l'hypothèse de récurrence à  $N' = N \cap \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_{m-1}$  et considérer*

$$\{\lambda \in \mathbb{Z} : \exists x \in \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_{m-1}, x + \lambda e_m \in N\}$$

- b) Soit  $M$  un groupe abélien **libre** engendré par  $m$  éléments. Montrer (par récurrence sur  $m$ ) que tout sous-groupe  $N \leq M$  est libre et peut-être engendré par  $n \leq m$  éléments. (*Raisonner par récurrence comme au a)*)
- c) Soit  $G$  un groupe abélien de type fini. Montrer qu'il existe des entiers  $n, m$  et

$$f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$$

un morphisme de groupes tel que  $G \simeq \mathbb{Z}^m / f(\mathbb{Z}^n)$ .

- d) En utilisant le théorème de réduction des matrices à coefficients entiers<sup>†</sup>, montrer que si  $G$  est un groupe abélien de type fini, alors il existe des entiers  $r \geq 0, d_1, \dots, d_k \geq 2$  uniques tels que :

$$G \simeq \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}$$

et  $d_1 | \dots | d_k$ .

*Indication pour l'unicité : on note  $G_t$  la partie de torsion de  $G$  i.e.  $G_t := \{g \in G : \exists n > 0, ng = 0\}$ . Vérifier que  $r$  est le rang de  $G/G_t$ . On est ramené à un groupe fini! Montrer que  $(d_k) = \{x \in \mathbb{Z} : xG_t = 0\}$  puis que  $d_{k-1}G_t \simeq d_{k-1}\mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/(d_k/d_{k-1})\mathbb{Z} \dots$*

- e) Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes abéliens d'ordre 24.
- f) *Exemples.* Trouver les facteurs invariants de :

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}.$$

<sup>†</sup>. Si  $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ , alors il existe  $P \in \text{GL}_m(\mathbb{Z})$  et  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$  tels que  $PMQ =$

$$\left( \begin{array}{c|c} e_1 & \\ \hline & e_K \\ \hline & \\ & 0 \\ & \hline & 0 \end{array} \right) \text{ où } e_1 | \dots | e_K \text{ sont des entiers non nuls ...}$$

- g) Soit  $K$  un corps commutatif. Soit  $G \leq K^\times$  un sous-groupe fini du groupe des inversibles. Montrer que  $G$  est cyclique.
- h) Montrer que  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/\text{pgcd}(m,n)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\text{ppcm}(m,n)\mathbb{Z}$ .

### Exercice 2 Éléments entiers sur $\mathbb{Z}$ .

- a) Si  $b \in \mathbb{C}$ , montrer que sont équivalentes :
- (i) il existe  $P \in \mathbb{Z}[X]$  unitaire tel que  $P(b) = 0$  ;
  - (ii)  $\mathbb{Z}[b]$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini ;
  - (iii) il existe un  $\mathbb{Z}[b]$ -module fidèle qui est un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini  $\dagger$ .
- Indication : pour iii  $\Rightarrow$  i : soit  $M$  un  $\mathbb{Z}[b]$ -module fidèle qui est un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini. Soient  $e_1, \dots, e_n$  des générateurs. Il existe des coefficients  $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$  tels que :*

$$\forall j, be_j = \sum_i a_{i,j} e_j .$$

*Vérifier que  $\forall n, \forall j b^n e_j = \sum_i (M^n)_{i,j} e_i$  où  $M := (a_{i,j})$ . Et utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.*

Un  $b$  qui vérifie ces propriétés est dit entier sur  $\mathbb{Z}$ .

- b) Vérifier que  $\sqrt{2}$  et les racines de l'unité sont entiers sur  $\mathbb{Z}$  et qu'en revanche  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ne l'est pas (*indication :  $\mathbb{Z}[1/2] \leq \mathbb{Z}[1/\sqrt{2}]$* ).
- c) Si  $z \in \mathbb{Q}$  est entier sur  $\mathbb{Z}$ , alors  $z \in \mathbb{Z}$ .
- d) Montrer que l'ensemble  $\overline{\mathbb{Z}}$  des éléments de  $\mathbb{C}$  entiers sur  $\mathbb{Z}$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ .

### Exercice 3 Entiers des extensions quadratiques

- a) Soit  $d$  un entier  $\neq 1$  sans facteur carré. On note  $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ . Vérifier que  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .
- b) On pose  $\overline{a + b\sqrt{d}} = a - b\sqrt{d}$ . Montrer que  $x \mapsto \bar{x}$  est un automorphisme de  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  et que  $\bar{x} = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$ .
- c) On note  $\mathcal{O}_d = \overline{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ . Montrer que  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \leq \mathcal{O}_d$  et que si  $d \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}] \leq \mathcal{O}_d$ .
- d) Soit  $x = a + b\sqrt{d} \in \mathcal{O}_d$ . Montrer que  $\bar{x} \in \mathcal{O}_d$  et en déduire que  $2a, 2bd \in \mathbb{Z}$ .
- e) En calculant  $x\bar{x}$ , montrer que  $2b \in \mathbb{Z}$ .
- f) Montrer que  $(2a)^2 - d(2b)^2 \equiv 0 \pmod{4}$  et conclure que :

$$\mathcal{O}_d = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & \text{si } d \not\equiv 1 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}] & \text{si } d \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

$\dagger$ . si  $M$  est un  $A$ -module, on dit que c'est un module fidèle si  $am = 0$  pour tout  $m \in M \Rightarrow a = 0$ .

**Exercice 4 Exemples de groupes de type fini avec un sous-groupe qui ne l'est pas**

a) Soit  $G$  le sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{Q})$  engendré par les matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Vérifier que  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}[1/2] \right\}$  est un sous-groupe de  $G$  et que  $H$  n'est pas de type fini !

b) Soit  $G$  le sous-groupe des permutations de  $\mathbb{Z}$  engendré par la transposition  $\tau = (0, 1)$  et par le *décalage*  $\delta : k \mapsto k + 1$ . Vérifier que le groupe  $H$  des permutations de  $\mathbb{Z}$  à support fini est un sous-groupe de  $G$  mais n'est pas de type fini !

c) Soit  $G$  un groupe de type fini. Soit  $H \leq G$  un sous-groupe d'indice fini. Vérifier que  $H$  est de type fini.

*Indication : si  $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$  (on suppose que les inverses des  $g_i$  sont dans la liste  $g_1, \dots, g_n$ ) si  $G = t_1 H \cup \dots \cup t_m H$  (avec  $t_1 = 1$ ), alors  $g_i t_j = t_{k_{ij}} h_{ij}$  pour certains  $h_{ij} \in H$  et on peut montrer que  $H = \langle h_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \rangle$ .*