Leçon 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

1 à mettre dans le plan

1. Lien entre une action (à gauche) $G \times X \to X$, $g \mapsto g.x$ et le morphisme de groupes associé : $G \to \mathfrak{S}_X$, $g \mapsto (x \mapsto g.x)$.
2. Action de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur les formes quadratiques. Donner les orbites dans le cas de $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q$ (pour $\mathbb{C}$, les orbites sont paramétrées par le rang, pour $\mathbb{R}$ par la signature et pour $\mathbb{F}_q$ par le discriminant et le rang ;
3. Action de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur les formes vilinéaires alternées. Orbites caractérisées par le rang K de caractéristique $\neq 2$.
4. Action de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur les matrices nilpotentes $n \times n$. Bijection entre les orbites et les partitions de n (=réduction de Jordan).
5. Formule de Burnside pour compter le nombre d'orbites :
$$\#\text{ orbites } = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$
où $X^g = \{x \in X \ : \ g.x = x\}$. Exemples d'applications : compter le nombre de coloriages du cube.
6. Représentations des groupes finis sur $\mathbb{C}$
7. Tout groupe fini se réalise comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ où $n = |G|$.
8. $|G \cdot x| = \frac{|G|}{|G_x|}$. Exemple : cardinal des matrices nilpotentes 2×2 sur $\mathbb{F}_q$.
9. Action de $\mathrm{PGL}_n(K)$ sur $\mathbb{P}^1(K)$. Exemples d'isomorphismes exceptionnels :
$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3,\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4,\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq A_5\ .$$
10. Bijection entre les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ et les partitions de n (décomposition en produit de cycles à supports disjoints).

2 Développements possibles

Développement 1 *Les sous-groupes finis de* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
cf. [2] ou [3, t. I]

Développement 2 ($\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 / \pm 1 \simeq \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$) *Soit* SU_2 *le groupe des matrices* 2×2 *complexes unitaires de déterminant* 1. *On a un isomorphisme de groupes :*

$$\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 / \pm (I_2, I_2) \simeq \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \ .$$

En particulier le groupe $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})/Z$ *n'est pas simple (*Z *est le centre (*$=\pm I_4$*)). cf. [5,] ou [6, ex. 12.56].*

Remarques : on fait agir $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ sur $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$ le $\mathbb{R}-$ espace vectoriel des quaternions. Si $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on note $M^* := {}^t\overline{M}$. Alors si $q_1, q_2 \in H$, on remarque que $q_1 q_2^* + q_2^* q_1 \in \mathbb{R} I_2$, on pose alors $\langle q_1, q_2 \rangle := \frac{q_1 q_2^* + q_2^* q_1}{2}$. C'est un produit scalaire sur H et $\langle q, q \rangle = \mathrm{dét}\, q$ si $q \in H$.

On a donc une action de $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ qur H via :

$$^\forall u, v \in \mathrm{SU}_2,\ ^\forall q \in H,\ (u,v).q := uqv^{-1} \ .$$

Cette action préserve le déterminant donc la norme euclidienne choisie sur H. D'où un morphisme $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \to O_4(\mathbb{R})$. On peut admettre que SU_2 est connexe ; si demandé, il suffit de savoir trouver un chemin continu qui relie $g \in \mathrm{SU}_2$ à I_2 et pour cela, il suffit de diagonaliser : $g = P^* \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P$ pour un θ réel et une matrice unitaire P ; voici un chemin continu :

$$t \in [0,1] \mapsto P^* \begin{pmatrix} e^{it\theta} & 0 \\ 0 & e^{-it\theta} \end{pmatrix} P \ ...$$

Pour la surjectivité, on peut à la place de l'argument de Vinberg qui fait appel aux algèbres de Lie, utiliser cet argument plus élémentaire : comme les réflexions orthogonales engendrent $O_4(\mathbb{R})$ et comme toute rotation est un produit d'un nombre pair de réflexions, il suffit de montrer que le produit de 2 réflexions orthogonales est dans l'image de $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$. Or l'application $r_u : H \to H$, $q \mapsto -uq^*u$ est une réflection orthogonale d'hyperplan l'orthogonal de u. On vérifie facilement que si $u, v \in \mathrm{SU}_2$, alors, $r_u \circ r_v : q \mapsto uv^*qv^*u$ est dans l'image de $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ car $uv^*, v^*u \in \mathrm{SU}_2$ ...

Développement 3 (Théorèmes de Sylow) *Avec la démonstration du [5] où on commence par donner un* $p-$*Sylow de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ *puis on remarque que tout groupe d'ordre* n *est isomorphe à un sous-groupe de* S_n *lui-même isomorphe à un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ *et où l'on montre le lemme suivant :*

Lemme : *si* $H \leq G$*, si* P *est un* $p-$*Sylow de* G*, alors il existe* $g \in G$ *tel que* $gPg^{-1} \cap H$ *est un* $p-$*Sylow de* H.

Développement 4 (Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) *Soit $K \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe compact, alors G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.*

Remarques : savoir démontrer facilement le cas fini en « moyennant »une forme quadratique définie positive. Cf [1]

Développement 5 *Les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$:*

Théorème 2.1 *Tout automorphisme du groupe $\mathfrak{S}_n$ est intérieur si $n \neq 6$. cf. [5]. Savoir qu'il existe des automorphismes non intérieurs si $n = 6$.*

Développement 6 *Théorème de Wedderburn : tout corps fini est commutatif. cf. [4]*

Développement 7 *La table des caractères de $\mathfrak{S}_n$ est à coefficients entiers. cf. [?].*

3 Exercices / questions possibles

1. Des exemples d'isomorphismes exceptionnels : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq A_5$.
   En effet : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_4)$ de cardinal 5 d'où un morphisme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \to S_5$. On montre que c'est injectif et on remarque que l'image est d'indice 2 dans S_5. D'un autre côté : $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ de cardinal 6 d'où un morphisme $f : PSL_2(\mathbb{F}_5) \to S_6$. On montre facilement que c'est injectif et que l'image est dans A_6 (par exemple comme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ est simple le noyau de $\epsilon \circ f : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \to \{\pm 1\}$ est tout le groupe !). On a donc un morphisme dont l'image dans A_6 est d'indice 6 (il suffit de calculer le cardinal de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$!). Donc c'est A_5.
2. Réaliser $\mathfrak{S}_3$ comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
   Réponse : le groupe $\mathfrak{S}_3$ agit (linéairement) sur le sous-espace de dimension 2 $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\}$ par permutation des coordonnées. On obtient un morphisme de groupes $S_3 \to \mathrm{GL}(E) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui est clairement injectif ! Explicitement, si on prend pour base de E les vecteurs $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 1, -1)$ on obtient le morphisme suivant :

$$(12) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (23) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. *(Si on parle de représentations des groupes finis)* Quelles sont les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$?
   Réponse : si V est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie et si $\rho : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible, alors les éléments de $\rho(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ sont diagonalisables (car d'ordre fini !) et commutent 2 à 2 (car $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est abélien). Donc ces éléments sont simultanément diagonalisables i.e. *il existe une base de diagonalisation commune en particulier il existe au moins un vecteur propre commun et donc comme V est irréductible, ce vecteur engendre V et ρ est de dimension 1. Les morphismes de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ sont les applications $k \mapsto e^{2i\pi kl/d}$ pour un certain $l = 0, ..., d-1$.*
4. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3$?
   Réponse : oui. On peut par exemple faire agir $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sur les trois éléments non nuls de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2$.
5. Quels sont à isomorphisme près les sous-groupes de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$? de $O_2(\mathbb{R})$? de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$? Montrer qu'un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est cyclique.
   Réponses : $\mathbb{C}^* > S^1 \simeq \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $e^{it} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ donc les sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont cycliques. Si $G < O_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fini, alors $G \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est distingué d'indice 1 ou 2 dans G et cyclique (car sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. On en déduit facilement que G est soit cyclique soit isomorphe à un groupe diédral. Pour les sous-groupes de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ qui sont finis il faut aussi ajouter les groupes du tétraèdre, du cube et du dodécaèdre (sous-entendu les sous-groupes des rotations qui laissent stable l'ensemble des sommets d'un tétraèdre/cube/dodécaèdre régulier centré en 0) respectivement isomorphes à A_4, S_4, A_5
6. Montrer que $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si sa classe de conjugaison est fermé !
7. La table des caractères de $\mathfrak{S}_n$ est réelle !
   Réponse : en effet si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, σ est conjugué à σ^{-1} (même décomposition en produit de cycles à supports disjoints) donc $\chi_r(\sigma) = \chi_r(\sigma^{-1}) = \overline{\chi_r(\sigma)}$ si $r : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation.
8. Si X est fini de cardinal ≥ 2, si G, groupe fini agit transitivement sur X, alors il existe $g \in G$ qui n'a pas de point fixe. Donner un contre-exemple si G infini.
   Réponse : d'après la formule de Burnside, la moyenne du nombre de points fixes est 1 (une seule orbite !). Or le neutre de G a beaucoup

de points fixes ... Contre-exemple : $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *agit transitivement sur la sphère* S^2 *mais toute rotation* $\neq I_3$ *a un axe donc deux points fixes sur la sphère.*

9. Combien y a-t-il de matrices nilpotentes 5×5 à coefficients réels, à conjugaison près ?

   Réponse : d'après la forme réduite de Jordan des matrices nilpotentes, il y en autant que de partitions de 5 i.e. *7.*

10. Combien y a-t-il de matrices nilpotentes à coefficients dans $\mathbb{F}_q$?

    Réponse : une matrice nilpotente non nulle est conjuguée à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ par conjugaison, le stabilisateur de cette matrice est le sous-groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{F}_q^\times$ et $b \in \mathbb{F}_q$. Ce qui fait un sous-groupe d'ordre $q(q-1)$. Il y a donc $\frac{|\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)|}{q(q-1)} = q^2 - 1$ matrices nilpotentes non nulles ...

Références

[1] Alessandrini. *Thèmes de géométrie.* Dunod.

[2] Combes. *Algèbre et géométrie.*

[3] Francinou, Gianella, and Nicolas. *Oraux x-ens, algèbre 1.* Cassini.

[4] X. Gourdon. *Les maths en tête, algèbre.* Ellipses.

[5] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.*

[6] E. B. Vinberg. *A course in algebra*, volume 56 of *Graduate text in mathematics.* American mathematical society, 2003.