Leçon 107 Représentations et caractères des groupes finis

1 Questions possibles

Pourquoi les représentations irréductibles d'un groupe abélien fini sont-elles de dimension 1 ?

Réponse : si G est abélien et $r : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une représentation irréductible, alors $r(G)$ est formé de matrices diagonalisables (car annulées par $X^{|G|} - 1$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$) qui commutent deux à deux (car G est abélien) donc il existe une droite propre commune !

Exemple de groupes non isomorphes qui ont la même table de caractères sur $\mathbb{C}$?

Réponse : par exemple D_4, diédral d'ordre 8 et le groupe Q_8 (sous-groupe des quaternions non nuls d'ordre 8 : $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

Comment retrouver les sous-groupes distingués de G par sa table de caractères ?

Réponse : les sous-groupes distingués sont des intersections de noyaux de représentations irréductibles. Sio $r : G \to \mathrm{GL}(V)$ est irréductible, alors $\ker r = \{g \in \mathbf{X} \ : \ r(g) = r(1)\}$.

Pourquoi les éléments de la table des caractères sont-ils des entiers algébriques ?

Réponse : les traces sont des sommes de valeurs propres, or les valeurs propres sont des racines de l'unité car dans un groupe fini d'ordre d, tout élément g vérifie $g^d = 1$, ...

Donner une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ de dimension $n-1$.

Réponse : la représentation par permutation des coordonnées dans l'hyperplan $\{(x_1, ..., x_n) \ : \ x_1 + ... + x_n = 0\}$.

Justifier que si χ est un caractère, alors $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

Réponse : $\chi(g^{-1})$ est la somme des inverses des valeurs propres de g, or comme g est d'ordre fini, ses valeurs propres sont des racine s de l'unité. Or pour un nombre complexe de module 1, l'inverse est le conjugué ...

Pourquoi y a-t-il des coefficients non réels dans la table de A_4 où A_5 ?

Réponse : dans A_4, le $3-$cycle (123) n'est pas conjugué à son inverse (321), donc il existe χ irréductible tel que $\chi(g) \neq \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$

2 Développements possibles

Développement 1 *Table des caractères de A_5.* **Référence : [3, Lect. 3]**

Développement 2 *Table des caractères des groupes diédraux D_n (cf. [5, exo 6, ch. XVIII])*

Développement 3 *Structure des groupes abéliens finis en utilisant que $G \simeq \widehat{G}$, dual de G, si G est abélien fini. Dans ce cas, il faut savoir démontrer le corollaire suivant : si G est un sous-groupe fini d'un $K^\times$ où K est un corps commutatif, alors G est cyclique. Référence :[2]*

Développement 4 *La table des caractères de $\mathfrak{S}_n$ est à coefficients entiers. On utilise cette propriété remarquable de $\mathfrak{S}_n$: si σ est une permutation d'ordre d, alors pour tout k premier à d, on a σ^k conjugué à σ ...* **Référence = [4, Prob. 2.12]**

Développement 5 Référence : [6, §13.2]

Théorème de Frobenius-Schur *: Si $r : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une représentation irré ductible d'un groupe fini G, on note i_r son indice de Schur :*

$$i_r = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_r(g^2) \ .$$

ALORS : $i_r = 0, \pm 1$ et on a :

$$i_r = 0 \Rightarrow \chi_r \neq \overline{\chi_r}$$

$$i_r = 1 \Rightarrow r \text{ « peut se réaliser sur } \mathbb{R} \text{ »}$$

$$i_r = -1 \Rightarrow \chi_r \text{ est réel mais } r \text{ ne peut se réaliser sur } \mathbb{R}$$

Développement 6 (théorème de Burnside) *Tout groupe fini G d'ordre $p^a q^b$, où p, q sont des nombres premiers et $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ est résoluble* i.e. *:*

$$^{\exists}G = G_0 \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_N = 1,\ ^{\forall}0 \leq i \leq N-1,\ G_i/G_{i+1} \text{ est cyclique.}$$

Remarques : être capable de donner un contre-exemple : A_5 est non résoluble d'ordre $2^2.3.5$.

Référence : [1, Append.]

Démonstration : Si $p = q$, c'est facile car dans un $p-$groupe le centre est non trivial ... Supposons $p \neq q$ et raisonnons par récurrence sur $a + b$.

C'est évident si $a + b \leq 1$. supposons $a + b \geq 2$ et que le résultat est vrai si $a' + b' < a + b$. supposons $p < q$.

Soit Q un $q-$Sylow de G. Comme Q est un $q-$groupe, son centre est non trivial donc il existe $1 \neq g \in Q$ tel que $Q \leq C(g)$, centralisateur de g.

On a bien entendu $[G : C(g)]|[G : Q]$ donc $[G : C(g)] = p^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 0$, c'est fini car $Q \triangleleft C(g) = G$ et G/Q et Q sont résolubles (un $p-$groupe et un $q-$groupe.

Supposons $n > 0$.

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible. Si C est la classe de conjugaison de g, alors $|C|\frac{\chi(g)}{\chi_\rho(1)}$ est entier sur $\mathbb{Z}$! *c'est le point difficile de la démonstration ...* :

$$\sum_{x\in C} \rho(x)$$

commute avec $\rho(h)$ pour tout $h \in G$. En effet,

$$\rho(h)\sum_{x\in C}\rho(x)\rho(h)^{-1} = \sum_{x\in C}\rho(hxh^{-1})$$

$$= \sum_{x\in C}\rho(x) \ .$$

D'après le lemme de Schur, $\sum_{x\in C}\rho(x)$ est une homothétie de rapport : $\lambda = \frac{\mathrm{Tr}(\sum_{x\in C}\rho(x))}{\dim V} = \frac{\sum_{x\in C}\chi_\rho(x)}{\chi_\rho(1)} = |C|\frac{\chi_\rho(g)}{\chi_\rho(1)}$. Or $\sum_{x\in C}\rho(x)$ est aussi la restriction à V vu comme sous-espace de $\mathbb{C}[G]$ de $\sum_{x\in C} x : e_y \mapsto \sum_{x\in C} e_{xy}$. Or ce dernier endomorphisme de $\mathbb{C}[G]$ a une matrice à coefficients entiers (dans la base $(e_x)_{x\in G}$ de $\mathbb{C}[G]$. Donc ses valeurs propres et en particulier λ est un élément entier sur $\mathbb{Z}$!

q.e.d.

Références

[1] Alperin & Bell. *Groups and representations.* Springer-Verlag, 1995.

[2] Colmez. *Élements d'analyse et d'algèbre.*

[3] Fulton & Harris. *Representation theory, a first course.* Springer, 2004.

[4] Isaacs. *Character theory of finite groups.* Dover Publications, 1976.

[5] S. Lang. *Algèbre.* Dunod, 2014.

[6] JP Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.*